Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Teoremas de Schauder y Borsuk para puntos fijos y aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Miguel Angel ALEJANDRO AGUILAR

ASESOR

Jorge Alberto CORIPACO HUARCAYA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Alejandro, M. (2019). *Teoremas de Schauder y Borsuk para puntos fijos y aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...15:00... horas del día Miércoles 17 de abril de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Josué Alonso Aguirre Enciso (Presidente), Lic. Víctor Emilio Carrera Barrantes (Miembro), Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «TEOREMAS DE SCHAUDER Y BORSUK PARA PUNTOS FIJOS Y APLICACIONES», presentado por el señor Bachiller MIGUEL ANGEL ALEJANDRO AGUILAR, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

..........dieciocho.............(18). Sobresaliente

A continuación el Presidente del Jurado, Mg. Josué Alonso Aguirre Enciso, manifestó que el señor Bachiller MIGUEL ANGEL ALEJANDRO AGUILAR, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 15:55.. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. JOSUÉ ALONSO AGUIRRE ENCISO
PRESIDENTE

LIC. VÍCTOR EMILIO CARRERA BARRANTES
MIEMBRO

DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
MIEMBRO ASESOR

Teoremas de Schauder y Borsuk para puntos fijos y aplicaciones.

Miguel Angel Alejandro Aguilar

Tesis de Licenciatura presentada al Programa de Pregrado de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Asesor: Jorge Alberto Coripaco Huarcaya

Lima - Perú

Abril del 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Miguel Angel Alejandro Aguilar.

Teoremas de Schauder y Borsuk para puntos fijos y aplicaciones.

Asesor: Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tesis de Licenciatura - UNMSM / Programa de Pregrado de la Escuela Profesional de Matemática, 2019.

I. Facultad de Ciencias Matemáticas, Programa de Pregrado de la Escuela Profesional de Matemática.

II. Título:

   1) Preliminares

   2) Teoremas elementales de puntos fijos

   3) Teorema de Borsuk y Brouwer

   4) Teorema de Schauder y aplicaciones

III. Lima - Perú, UNMSM - 2019

Dedicado a mi hija Nayeli por brindarme
su amor, comprensión, y estar siempre a mi lado,
siendo la motivación de mi vida.

Agradecimientos

A lo largo de estos años, compartí momentos buenos y agradables con muchas personas. Agradezco :

• A mis padres Ana y Juan, que siempre lucharon por mi educación. También agradezco a mis hermanos por el apoyo y comprensión.

• A mi esposa Marisol, por brindarme su apoyo e impulsarme a seguir adelante.

• A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por las lecciones que aprendí en ella.

• Al Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, un asesor con eficiencia y confianza.

• A la memoria del Dr. Agripino García, que contribuyo en parte a la realización de este trabajo.

• A los Profesores de la Escuela Profesional de Matemática, por contribuir en la formación de los alumnos durante el Pregrado.

• A mis Colegas de Pregrado, en especial a todos mis amigos cercanos.

• A los Trabajadores Técnicos y Administrativos de la Escuela Profesional de Matemática, por sus labores eficientes dentro de la facultad.

• Por fin, agradezco a todos los que directamente o indirectamente me dieron su apoyo.

Índice general

Resumen VII

Abstract VIII

Introducción IX

1. Preliminares **1**

1.1. Espacios métricos 1

1.2. Espacios normados 4

1.3. Espacios de Banach 6

2. Teoremas elementales de puntos fijos **8**

2.1. Puntos fijos para mapeos contractivos 8

2.2. Resultados de la teoría de orden: El teorema de Bishop-Phelps 23

2.3. Aplicaciones: Los teoremas de Danes y Ekeland 30

3. Teoremas de Borsuk y Brouwer **36**

3.1. Teorema de Borsuk-Ulam y sus formulaciones equivalentes 36

3.2. Teorema de Brouwer 57

4. Teorema de Schauder y aplicaciones **61**

4.1. Extensiones de los teoremas de Borsuk y Brouwer 61

4.2. Aplicaciones de los teoremas de Schauder y Borsuk 65

Conclusión **68**

Referencias Bibliográficas **69**

Resumen

En esta tesis, se presenta la teoría de punto fijo basado en las consideraciones de orden y completitud, resaltando la importancia de los teoremas de Knaster-Tarski y Bishop-Phelps. De igual manera la teoría de triangulación y triangulación simétrica de S^n, necesarias para demostrar las equivalencias de los teoremas de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk, antipodal de Borsuk y Borsuk-Ulam, como consecuencia se demuestra el teorema de Borsuk y las equivalencias del teorema de punto fijo de Brouwer con los teoremas de Bohl y la retracción de Borsuk. Para finalizar, se demuestra el teorema de punto fijo de Schauder y Borsuk para cualquier espacio lineal normado que son la extensión de los teoremas de Brouwer y Borsuk respectivamente, además se presenta algunas aplicaciones como son la demostración del teorema de Peano y de Krein-Krasnosel'skñ-Milman.

Abstract

In this thesis, the fixed point theory based on the considerations of order and completeness is presented, highlighting the importance of the theorems of Knaster-Tarski and Bishop-Phelps. In the same way the theory of triangulation and symmetric triangulation of S^n, necessary to prove the equivalences of the theorems of Lusternik-Schnirelmann-Borsuk, antipodal of Borsuk and Borsuk-Ulam, as a consequence Borsuk's theorem and the equivalences of the theorem of Brouwer's fixed point with Bohl's theorems and Borsuk's retraction. Finally, the fixed-point theorem of Schauder and Borsuk is proved for any normed linear space, which are the extension of the theorems of Brouwer and Borsuk respectively, and some applications are presented, such as the proof of the theorem of Peano and Krein-Krasnosel'skñ-Milman.

Introducción

En el capítulo 1 contiene algunas definiciones y teoremas sobre la teoría de espacios métricos, normados y de Banach. Estas herramientas son necesarias para la comprensión de los capítulos posteriores (asumiendo que el lector está familiarizado con estos temas).
En el capítulo 2 se introducen los temas vinculados con la teoría del punto fijo que, en su mayoría, incluyen las nociones de completitud, orden y convexidad. En primer lugar, se demuestra el principio de contracción de Banach y el teorema de invarianza de dominio para campos contractivos. Luego se estudia el método de continuación para mapeos contractivos y, como aplicación, se demuestra el teorema de alternativa lineal. Además, se presenta una versión elemental del teorema antipodal de Borsuk. Posteriormente se presenta algunos teoremas de punto fijo basados en las consideraciones de orden y completitud: El teorema Knaster-Tarski y Bishop-Phelps. El capítulo concluye con algunas aplicaciones a la geometría de espacios de Banach (teorema de Danes) y la teoría de puntos críticos (teorema de Ekeland).
En el capítulo 3, se comienza introduciendo las definiciones de triangulación y triangulación simétrica de S^n, las cuales serán necesarias para demostrar las equivalencias entre los siguientes teoremas: Lusternik-Schnirelmann-Borsuk, antipodal de Borsuk y Borsuk-Ulam. Posteriormente, se demuestran los teoremas principales de este capítulo: el teorema de punto fijo de Borsuk, consecuencia del teorema antipodal de Borsuk, y la equivalencia del teorema del punto fijo de Brouwer con los teoremas de Bohl y la retracción de Borsuk.
El capítulo 4 comienza con la definición de la proyección de Schauder y se demuestra el teorema de aproximación de Schauder, el cual es un teorema fundamental para conseguir demostrar el teorema de punto fijo de Schauder, además se demuestra un teorema de extensión del teorema de punto fijo de Borsuk. Posteriormente, se aplica el teorema de punto fijo de Schauder para demostrar el teorema de Peano y, finalmente, el teorema de Borsuk para demostrar el teorema de Krein-Krasnosel'skñ-Milman.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las nociones básicas del curso de Análisis Funcional.

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1. *Un espacio métrico es un par* (X, d), *donde* X *es un conjunto arbitrario no vacío y* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación llamada distancia o métrica, tal que para cualesquiera* $x, y, z \in X$, *se verifica:*

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ejemplo 1.1. *Consideremos* $l^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C};\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\ ;\ p \geq 1 \right\}$, *las aplicaciones* $d_p(x, y) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ *son métricas.*

Definición 1.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* M *un subconjunto de* X, *se dice que es denso en* X, *si* $\overline{M} = X$.
El espacio X *se dice separable si posee algún subconjunto numerable que es denso en* X.

Ejemplo 1.2. *Los espacios* l^p, *con* $1 \leq p < \infty$, *son separables.*
Pues $M = \{y = (y_1, ..., y_n, 0, ...) \mid y_k \in \mathbb{Q} \; ; \; 1 \leq k \leq n\}$ *es numerable y denso en* l^p.

Definición 1.3. *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *dos espacios métricos. Una aplicación* $F : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *que satisface*

$$\rho(F(x),\, F(y)) \leq M\, d(x, y)$$

para alguna constante $M > 0$ *y para todo* $x, y \in X$ *es llamada Lipschitziana.*
Se denota $L(F)$ *al menor* M, *llamado constante de Lipschitz.*

1. *Si* $L(F) < 1$, *entonces* F *es contractivo.*

2. *Si* $L(F) = 1$, *entonces* F *es no expansivo.*

Toda aplicación Lipschitz es continua.

Definición 1.4. *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *dos espacios métricos y* $0 < \alpha \leq 1$. *Una aplicación* $F : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *se llama* $Hölder$ *con exponente* α, *si existe una constante* $k > 0$ *tal que*

$$\rho(F(x),\, F(y)) \leq k\, [d(x,\, y)]^{\alpha} \quad para \;\; todo \quad x, \, y \in X\, .$$

Teorema 1.1. *Sean* (X, d) *y* (Y, ρ) *dos espacios métricos y* $F : (X, d) \longrightarrow (Y, \rho)$ *una aplicación* $Hölder$ *entonces* F *es uniformemente continua.*

Demostración. Ver [9] □

Definición 1.5. *Sea* X *un espacio métrico y* $A \subset X$, *una aplicación continua* $r : X \longrightarrow A$ *con* $r|A = id_A$ *es llamado una retracción de* X *sobre* A.

Definición 1.6. *Un espacio métrico* (X, d) *es completo si toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente.*

Proposición 1.1. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo,* M *un subconjunto de* X *es completo si y solo si* M *es cerrado en* X.

Demostración. Ver [7] □

Ejemplo 1.3. *El espacio* $c = \{\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{\infty} \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ converge\ en\ \mathbb{C}\}$ *es completo con la métrica* $d(x, y) = \sup\{\, |x_n - y_n| \mid n \in \mathbb{N}\,\}$.

Definición 1.7. *Dado un espacio métrico* (X, d), *un espacio* (X^*, d^*) *es una completación de* (X, d) *si existe* X_0 *un subespacio denso en* X^* *tal que* (X, d) *es isométrico a* (X_0, d^*).

Teorema 1.2 (Completación). *Para un espacio métrico* (X, d) *existe un espacio métrico completo* (X^*, d^*) *que tiene un subespacio* X_0 *isométrico con* X *y denso en* X^*. *Este espacio* X^* *es único excepto por isometrías, esto es, si* Y *es cualquier espacio métrico completo que tiene un subespacio* Y_0 *isométrico con* X *y denso en* Y, *entonces* X^* *y* Y *son isométricos.*

Demostración. Ver [7] □

Teorema 1.3 (Cantor). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\{A_n\}$ *una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en* X *tal que* $\delta(A_n) \longrightarrow 0$.
Entonces la intersección $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n$ *contiene exactamente un punto.*

Demostración. Ver [7] □

Definición 1.8. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, un subconjunto finito* $N = \{x_1, ..., x_n\}$ *de* X *es un* $\epsilon - red\,(\epsilon > 0)$, *si* $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.

Definición 1.9. *Un espacio métrico* (X, d) *es totalmente acotado si contiene un* $\epsilon - red$, *para cada* $\epsilon > 0$.

Definición 1.10. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, un cubrimiento de* X *es una colección* $\{U\}$ *de conjuntos cuya unión es* X.

Definición 1.11. *Un espacio métrico* (X, d) *es compacto, si cada cubrimiento abierto de* X *contiene un subcubrimiento finito.*

Definición 1.12. *Sean* X, Y *espacios métricos, una aplicación continua* $F : X \longrightarrow Y$ *es llamado compacto, si* $F(X)$ *está contenido en un subconjunto compacto de* Y.

Definición 1.13. *Sea* X *un espacio métrico, un subconjunto* $A \subset X$ *es relativamente compacto si* $\overline{A}$ *es compacto.*

Teorema 1.4 (Hausdorff). *Un espacio métrico es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Ver [7] □

Definición 1.14. *Un espacio métrico* X *es llamado conexo, si no es la unión de dos subconjuntos, disjuntos, no vacíos y abiertos en* X.

Definición 1.15. *Sea* E *un espacio vectorial, un subconjunto* A *de* X *es llamado convexo, si* $x,\, y \in A$ *implica*

$$[x, y] = \{\, z \in E \mid z = t\,x + (1-t)\,y\,,\ \ 0 \leq t \leq 1\,\} \subset A\,.$$

Definición 1.16. *Sea* E *un espacio vectorial, para cualquier subconjunto* $A \subset E$, *la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a* A, *es llamado la cápsula convexa de* A, *será denotado por* $conv(A)$.
Podemos describir $conv(A)$ *en términos de* A *como el conjunto*

$$\{y \in E \mid y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\,;\ \ a_i \in A\,,\ \ 0 \leq \lambda_i \leq 1\,,\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,;\ \ n\ \ arbitrario\}$$

1.2. Espacios normados

Definición 1.17. *Un espacio normado es un par* $(E,\, \|\cdot\|)$ *formado por un espacio vectorial* E *y una aplicación* $\|\cdot\| \,:\, E \longrightarrow \mathbb{R}$, *llamada norma, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|\,x\,\| \geq 0$.

2. $\|\,x\,\| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

3. $\|\,\alpha\,x\,\| = |\alpha|\,.\,\|\,x\,\|$.

4. $\|\,x + y\,\| \leq \|\,x\,\| + \|\,y\,\|$.

Ejemplo 1.4. *Sea* $l^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C};\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\ ;\ p \geq 1 \right\}$, *definimos la norma* $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definición 1.18. *Sea* E *un espacio normado, un conjunto* $A \subset E$ *es equilibrado, si*

$$\lambda\, A \equiv \{\, \lambda\, x \mid x \in A\} \subset A\ \ \ para\ \ todo\ \ \ |\lambda| \leq 1\,.$$

Definición 1.19. *Sea* E *un espacio normado, un conjunto* $A \subset E$ *es absorbente, si para cada* $x \in E$ *existe un* $r > 0$ *con* $x \in \lambda A$ *para todo* $|\lambda| \geq r$.

Definición 1.20. *Sea* E *un espacio normado, un conjunto* $A \subset E$ *es encerrado, si para cada vecindad* V *de* 0 *existe un real* $\lambda = \lambda(V)$ *tal que* $A \subset \lambda V$.

Proposición 1.2. *Cualquier vecindad* V *de* 0 *contiene un vecindad equilibrada de* 0*; y si* V *es convexo, entonces* V *contiene una vecindad equilibrada convexa de* 0.

Demostración. Ver [9] □

Definición 1.21. *Sea* E *un espacio normado, si* $K \subset E$ *es cualquier conjunto convexo, equilibrado y absorbente en* E.
La función $p_K : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$p_K(x) = inf\,\{\,\lambda > 0 \mid x \in \lambda\, K\}$$

es llamada la funcional de Minkowski de K.

Proposición 1.3. *Sea* E *un espacio normado, si* $K \subset E$ *es cualquier conjunto convexo, equilibrado y absorbente en* E*,* $p_K : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *la funcional de Minkowski de* K*, cumple lo siguiente:*

1. $p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y)$ *para todo* $x, y \in E$.

2. $p_K(\lambda\, x) = |\lambda|\, p_K(x)$ *para todo* $x \in E$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Además, p_K *es continua si y solo si* $0 \in int(K)$.

Demostración. Ver [9] □

Teorema 1.5. *Sea* E *un espacio normado, si* $F \subset E$ *es un subespacio de dimensión finita entonces* F *es completo.*
En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Demostración. Ver [7] □

Definición 1.22. *Sean* E *y* F *espacios normados, el conjunto de todos los operadores lineales continuos de* E *a* F*, denotado por* $\mathscr{L}(E, F)$*, con las operaciones*

$$(S+T)(x) = S(x) + T(x) \quad y \quad (\lambda\, T)(x) = \lambda\, T(x)\,,$$

es un espacio normado con la norma $\|T\| = sup\,\{\,\|T(x)\| \mid \|\,x\,\| = 1\,\}$.

Teorema 1.6. *Sea* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *y* E *un espacio de dimensión finita, entonces* T *es un operador lineal acotado.*

Demostración. Ver [7] □

1.3. Espacios de Banach

Definición 1.23. *Un espacio normado* $(E, \|\cdot\|)$ *completo se llama un espacio de Banach.*

Ejemplo 1.5. *El espacio normado* $(l^p, \|x\|_p)$ *es completo, por lo tanto un espacio de Banach.*

Proposición 1.4. *Sea* E *un espacio de Banach, un subespacio* $F \subset E$ *es completo si y solo si* F *es cerrado en* E.

Demostración. Ver [3] □

Teorema 1.7. *El espacio normado* $\mathscr{L}(E, F)$ *es un espacio de Banach, si* F *es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [3] □

Teorema 1.8. *Sea* E *un espacio de Banach y* $A \subset E$ *un subconjunto relativamente compacto, entonces* $\overline{conv(A)}$ *es compacto.*

Demostración. Ver [3] □

Teorema 1.9. *Sean* E, F *espacios de Banach y* $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. *Si* T *es biyectiva, entonces* T^{-1} *es continua.*

2. *Si* T *es sobreyectiva, entonces* T *es un mapeo abierto.*

Demostración. Ver [3] □

Definición 1.24. *Sean* E, F *espacios de Banach, y* $U \subset E$ *un subconjunto abierto. Un mapeo* $f : U \longrightarrow F$ *es diferenciable en* $x \in U$, *si existe un operador* $T_x \in \mathscr{L}(E, F)$ *tal que*

$$f(y) - f(x) = T_x(y - x) + R(x, y)\,,$$

donde

$$\lim_{\|y-x\|\longrightarrow 0} \frac{\|R(x,y)\|}{\|y-x\|} = 0\,.$$

El operador lineal T_x *es llamada la derivada de* f *en* x*, y escribiremos* $Df(x)$.

Definición 1.25. *Sea* E *un espacio de Banach. El espacio de Banach* $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ *de todos los funcionales lineales continuos es llamado el espacio dual de* E*, y es denotado por* E^*.

Para $f \in E^*$ *y* $x \in E$*, escribiremos* $\langle f, x\rangle$ *en lugar de* $f(x)$.

Capítulo 2

Teoremas elementales de puntos fijos

En este capítulo veremos algunas aplicaciones del teorema de punto fijo, para mas detalles el lector puede consultar los siguientes libros: Introductory functional analysis with applications de Kreyszig, E. [7] y Fixed point theory de Granas, A. y Dugundji, J. [6].

2.1. Puntos fijos para mapeos contractivos

El principio de contracción de Banach afirma que todo mapeo contractivo de espacios métricos completos admite un único punto fijo.

Teorema 2.1 (Principio de contracción de Banach). *Sea* (Y, d) *un espacio métrico completo y* $F : Y \longrightarrow Y$ *un mapeo contractivo entonces,* F *tiene un único punto fijo* u *y* $F^n(y) \longrightarrow u$ *para cada* $y \in Y$.

Demostración. Sea $\alpha < 1$ la constante de contracción para F.

1. **Unicidad.**
   Si $F(x_0) = x_0$ y $F(y_0) = y_0$, tal que $x_0 \neq y_0$ entonces

   $$d(x_0, y_0) = d(F(x_0), F(y_0)) \leq \alpha\, d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$$

   esto es una contradicción.

2. **Existencia.**
   Probaremos que para cualquier $y \in Y$ la sucesión $\{F^n(y)\}$ converge a un punto

fijo.

Observar que $d(F(y), F^2(y)) \leq \alpha\, d(y, F(y))$, por inducción

$$d(F^n(y), F^{n+1}(y)) \leq \alpha^n\, d(y, F(y)) .$$

Dado $\epsilon > 0$ y cualesquiera $n, p \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d(F^n(y), F^{n+p}(y)) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} d(F^i(y), F^{i+1}(y)) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \alpha^i d(y, F(y)) ,$$

$$d(F^n(y), F^{n+p}(y)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(y, F(y)) ,$$

como $\alpha^n \longrightarrow 0$, entonces $d(F^n(y), F^{n+p}(y)) < \epsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{F^n(y)\}$ es de Cauchy.

Siendo (X, d) un espacio métrico completo, tenemos que

$$F^n(y) \longrightarrow u \quad para \;\; algun \quad u \in Y ,$$

por la continuidad de F se tiene

$$F^{n+1}(y) \longrightarrow F(u) ,$$

como $\{F^{n+1}(y)\}$ es una subsucesión de $\{F^n(y)\}$, entonces $F(u) = u$.

Hemos demostrado que para cada $y \in Y$ el limite de la sucesión $\{F^n(y)\}$ existe y es un punto fijo; ya que F tiene como máximo un punto fijo, cada sucesión $\{F^n(y)\}$ converge al mismo punto u.

$\square$

El principio de contracción de Banach tiene una versión local útil que involucra una bola abierta B en un espacio métrico completo Y y un mapeo contractivo de B en Y que no desplaza el centro de la bola demasiado lejos.

Corolário 2.1. *Sea* (Y, d) *un espacio métrico completo, con* $B = B(y_0, r) \subset Y$, *y dado cualquier mapeo contractivo* $F : B \longrightarrow Y$ *con constante* $\alpha < 1$.
Si $d(F(y_0), y_0) < (1-\alpha)\, r$ *entonces* F *tiene un punto fijo.*

Demostración. Dado $0 < \epsilon < r$ tal que $d(F(y_0), y_0) < (1-\alpha)\epsilon < (1-\alpha)\, r$.

Afirmación. F mapea la bola cerrada $K = \{y \in Y \mid d(y, y_0) \leq \epsilon\}$ en sí misma.

Si $y \in K$, entonces

$$d(F(y), y_0) \leq d(F(y), F(y_0)) + d(F(y_0), y_0) ,$$

$$d(F(y), y_0) \leq \alpha\, d(y, y_0) + (1-\alpha)\epsilon\,,$$

$$d(F(y), y_0) \leq \alpha\, \epsilon + (1-\alpha)\epsilon = \epsilon\,,$$

así $F(y) \in K$.
Siendo K un espacio métrico completo, por el teorema (2.1) se sigue que F tiene un punto fijo. □

En la mayoría de las aplicaciones, el espacio métrico completo Y será un espacio de Banach; debido a esta estructura más rica, el teorema de contracción de Banach conduce a un resultado especialmente útil en aplicaciones.

Definición 2.1. *Sea X un subconjunto de un espacio de Banach E . Dado un mapeo contractivo $F : X \longrightarrow E$, el mapeo $f : X \longrightarrow E$ definido por $f(x) = x - F(x)$ es llamado campo contractivo asociado.*

Teorema 2.2 (Invarianza de dominio para campos contractivos). *Sea E un espacio de Banach, $U \subset E$ abierto y $F : U \longrightarrow E$ un mapeo contractivo con constante de contracción $\alpha < 1$.*
Sea $f : U \longrightarrow E$ definido por $f(x) = x - F(x)$ el campo contractivo asociado, entonces:

1. *$f : U \longrightarrow E$ es un mapeo abierto; en particular $f(U)$ es abierto en E.*

2. *$f : U \longrightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. 1. **Afirmación.** Para cualquier $u \in U$, $B[f(u), (1-\alpha)r] \subset f[B(u, r)]$.
Escogemos cualquier $y_0 \in B[f(u), (1-\alpha)r]$ y definimos

$$G : B(u, r) \longrightarrow E \quad \textit{por} \quad G(y) = y_0 + F(y)\,,$$

como

$$d(G(y), G(z)) = d(y_0 + F(y), y_0 + F(z)) = d(F(y), F(z)) \leq \alpha\, d(y, z)\,,$$

entonces G es contractivo.
Luego,

$$d(G(u), u) = \|G(u) - u\| = \|y_0 + F(u) - u\| = \|y_0 - f(u)\| < (1-\alpha)r\,,$$

por el Corolario (2.1) existe $u_0 \in B(u,r)$ tal que

$$u_0 = G(u_0) = y_0 + F(u_0)\,,$$

entonces $f(u_0) = y_0$, así

$$B[f(u),(1-\alpha)r] \subset f[B(u,r)]\,,$$

por lo tanto f es un mapeo abierto.
Luego, para cada $w \in f(U)$ existe $u \in U$ tal que $w = f(u)$ y por la afirmación anterior tenemos

$$B[f(u),(1-\alpha)r] \subset f[B(u,r)] \subset f(U)$$

por lo tanto $f(U)$ es abierto en E.

2. Sean $u, v \in U$ tal que $u \neq v$ entonces

$$\|f(u)-f(v)\| = \|u-F(u)-(v-F(v))\| \geq \|u-v\|-\|F(u)-F(v)\| > (1-\alpha)\|u-v\|$$

así $f(u) \neq f(v)$, de modo que f es inyectiva.
Siendo $f : U \longrightarrow f(U)$ sobreyectiva entonces es una biyección abierta y continua, por lo tanto un homeomorfismo.

$\square$

Corolário 2.2. *Sea E un espacio de Banach y $F : E \longrightarrow E$ un mapeo contractivo, entonces el campo correspondiente $f = I - F$ es un homeomorfismo de E en si mismo.*

Demostración. Probaremos que $F(E) = E$.
Sea $y_0 \in E$ definimos $G : E \longrightarrow E$ por

$$G(y) = y_0 + F(y)\,,$$

hemos probado anteriormente que G es contractivo, entonces tiene un punto fijo,

$$x_0 = G(x_0) = y_0 + F(x_0)$$

así $y_0 = f(x_0)$, entonces $y_0 \in f(E)$, por lo tanto $f(E) = E$.
Por el teorema 2.2, concluimos que F es un homeomorfismo. $\square$

Definición 2.2. *Sea (Y, d) un espacio métrico completo y X un subconjunto cerrado en Y con interior no vacío U y borde $A = \partial X$, denotamos por $\mathscr{C}(X, Y)$ el conjunto de mapeos contractivos de X en Y.*

Para un mapeo contractivo F de X en Y, nos preocupa la existencia de soluciones de la ecuación $x = F(x)$. Un método para determinar si una ecuación de este tipo tiene o no una solución comienza por incrustar F en una familia parametrizada $\{H_\lambda\}$ de mapeos que unen F a un mapeo G más sencillo y luego intenta reducir el problema a la ecuación $x = G(x)$. En términos geométricos, uno "deforma" la gráfica de F a la de G y busca concluir a partir de la naturaleza de la deformación que si la gráfica de G se intersecta con la diagonal $\varDelta \subset X \times Y \subset Y \times Y$, entonces la gráfica de F también debe hacerlo.

Definición 2.3. *Sea $(\varLambda, \rho)$ un espacio parámetro con métrica ρ, una familia $\{H_\lambda \mid \lambda \in \varLambda\}$ de mapeos en $\mathscr{C}(X, Y)$ es llamado α-contractivo, donde $0 \leq \alpha < 1$, provisto por algún $M > 0$ y algún $0 < \kappa \leq 1$ tenemos:*

1. $d[H_\lambda(x_1), H_\lambda(x_2)] \leq \alpha\, d(x_1, x_2)$ *para todo* $\lambda \in \varLambda$ *y* $x_1, x_2 \in X$.

2. $d[H_\lambda(x), H_u(x)] \leq M\,[\rho(\lambda, u)]^\kappa$ *para todo* $x \in X$ *y* $\lambda, u \in \varLambda$.

Observaciones 2.1. *Las observaciones serán útiles para demostraciones posteriores.*

1. *Si $\{H_\lambda\}$ es α-contractivo, entonces el mapeo $H : \varLambda \times X \longrightarrow Y$ definido por $H(\lambda, x) = H_\lambda(x)$ es continuo.*

   Probaremos que H es un mapeo Lipschitz. En efecto,

$$d\,[H(\lambda, x); H(u, y)] = d\,[H_\lambda(x); H_u(y)] \leq d\,[H_\lambda(x); H_\lambda(y)] + d\,[H_\lambda(y); H_u(y)]$$

$$d\,[H(\lambda, x); H(u, y)] \leq \alpha\, d(x, y) + M\,[\rho(\lambda, u)]^\kappa = \alpha\left[d(x, y) + \frac{M}{\alpha}\,[\rho(\lambda, u)]^\kappa\right],$$

   por lo tanto

$$d\,[H(\lambda, x); H(u, y)] \leq \alpha\, d^*\,[(\lambda, x); (u, y)]\,.$$

2. *El mapeo H determina la familia $\{H_\lambda\}$ y viceversa.*

3. *Para cualquier $\lambda \in \varLambda$, el conjunto de puntos fijos $Fix(H_\lambda)$ es vacío o consta de exactamente un punto fijo denotado por x_λ.*

4. *Dado* $x_\lambda = H_\lambda(x_\lambda)$ *y* $x_u = H_u(x_u)$, *tenemos:*

$$d\,(x_\lambda, x_u) \leq d\,[H_\lambda(x_\lambda), H_u(x_\lambda)] + d\,[H_u(x_\lambda), H_u(x_u)] \leq M\,[\rho(\lambda, u)]^\kappa + \alpha\, d(x_\lambda, x_u)\,,$$

por lo tanto

$$d\,(x_\lambda, x_u) \leq \frac{M}{1-\alpha}\,[\rho(\lambda, u)]^\kappa\,.$$

Definición 2.4. *Sea* $\mathscr{C}_A(X,Y)$ *el conjunto de todos los mapeos* F *en* $\mathscr{C}(X,Y)$ *tal que la restricción* $F|A : A \longrightarrow Y$ *no tiene punto fijo en* A, *donde* $A = \partial\, X$.

Teorema 2.3 (Teorema elemental de la función implícita). *Sea* (Λ, ρ) *un espacio parámetro con* Λ *conexo y sea* $\{H_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ *una familia* α*-contractivo en* $\mathscr{C}_A(X,Y)$ *entonces:*

1. *Si la ecuación* $H_\lambda(x) = x$ *tiene una solución para algún* $\lambda \in \Lambda$, *entonces tiene una solución única* x_λ *para cada* $\lambda \in \Lambda$.

2. *Si* $x_\lambda = H_\lambda(x_\lambda)$ *para* $\lambda \in \Lambda$, *entonces el mapeo* $g : \Lambda \longrightarrow U$, *definido por* $g(\lambda) = x_\lambda$ *es* $H\ddot{o}lder$ *continuo.*

Demostración. 1. Consideremos $Q = \{\, \lambda \in \Lambda \,|\, x_\lambda = H_\lambda(x_\lambda) \text{ para algún } x_\lambda \in U\}$, notemos que Q es no vacío por hipótesis y observar que:

a) Q es cerrado en Λ: En efecto, sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión en Q tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$; para $x_{\lambda_n} = H_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})$ y $x_{\lambda_m} = H_{\lambda_m}(x_{\lambda_m})$ tenemos

$$d(x_{\lambda_n}, x_{\lambda_m}) \leq \frac{M}{1-\alpha}\,[\rho(\lambda_n, \lambda_m)]^\kappa\,,$$

mostrando que $\{x_{\lambda_n}\}$ es una sucesión de Cauchy, por completitud de la métrica d tenemos $x_{\lambda_n} \longrightarrow x_0$ para algún $x_0 \in X$, y por la continuidad de H_λ

$$x_{\lambda_n} = H_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) \longrightarrow H_{\lambda_0}(x_0)\,,$$

entonces $x_0 = H_{\lambda_0}(x_0)$, así concluimos que $\lambda_0 \in Q$.

b) Q es abierto en Λ: Sea $\lambda_0 \in Q$ con $x_{\lambda_0} = H_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})$, fijamos una bola abierta

$$B(x_{\lambda_0}, r) = \{\, x \in X \,|\, d(x, x_{\lambda_0}) < r\} \subseteq U$$

y elegimos $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon^\kappa \leq (1-\alpha)r/M$.
Si λ es cualquier punto en la bola abierta

$$B(\lambda_0, \epsilon) = \{\, \lambda \in \Lambda \,|\, \rho(\lambda_0, \lambda) < \epsilon\}$$

entonces

$$d[H_\lambda(x_{\lambda_0}), x_{\lambda_0}] = d[H_\lambda(x_{\lambda_0}), H_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})] \leq M[\rho(\lambda, \lambda_0)]^\kappa < (1-\alpha)r\,,$$

por corolario 2.1 H_λ tiene un punto fijo, entonces $B(\lambda_0, \epsilon) \subset Q$.

Siendo Q no vacío, Λ un espacio parámetro conexo y usando (a) , (b) se sigue que $Q = \Lambda$, esto completa la prueba.

2. Sean $\lambda, u \in \Lambda$, se cumple por observación 2.1 que

$$d(g(\lambda), g(u)) = d(x_\lambda, x_u) \leq \frac{M}{1-\alpha}[\rho(\lambda, u)]^\kappa\,,$$

por lo tanto g es $H\ddot{o}lder$ continuo.

□

Para las aplicaciones, ahora asumimos que nuestro espacio métrico Y es un subconjunto C convexo, cerrado de un espacio de Banach E y nuestro espacio Λ de parámetros es $[0,1]$. Debido a esta estructura más rica, ahora podemos obtener el resultado deseado.

Teorema 2.4 (Alternativa no lineal). *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach E y U un subconjunto abierto relativo de C con $0 \in U$, entonces cualquier mapeo contractivo y limitado $F : \bar{U} \longrightarrow C$ tiene al menos una de las siguientes propiedades:*

1. *F tiene un único punto fijo.*

2. *Existen $x_0 \in \partial U$ y $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que $x_0 = \lambda_0\, F(x_0)$.*

Demostración. Para $(\lambda, x) \in [0,1] \times \bar{U}$ definimos $H_\lambda : \bar{U} \longrightarrow C$ por

$$H_\lambda(x) = \lambda\, F(x)\,.$$

Probaremos que $\{H_\lambda \,|\, \lambda \in [0,1]\}$ es una familia α-contractivo en $\mathscr{C}(\bar{U}, C)$ con $\kappa = 1$.
En efecto:

1. Tenemos $d(H_\lambda(x_1), H_\lambda(x_2)) = d(\lambda F(x_1), \lambda F(x_2)) \leq \lambda\, \alpha\, d(x_1, x_2)$ entonces $d(H_\lambda(x_1), H_\lambda(x_2)) \leq \alpha\, d(x_1, x_2)$ para todo $x_1,\, x_2 \in \bar{U}$ y $\lambda \in [0,1]$.

2. Tenemos $d(H_\lambda(x), H_u(x)) = d(\lambda F(x), uF(x)) = \|(\lambda - u)F(x)\|$ entonces $d(H_\lambda(x), H_u(x)) \leq M\, |\lambda - u|$ para todo $\lambda, u \in [0,1]$ y $x \in \bar{U}$.

Ahora, supongamos:

1. Si $\{H_\lambda \mid \lambda \in [0,1]\}$ no tiene punto fijo en el borde ∂U.
   Siendo $H_0(0) = 0$, concluimos por el teorema 2.3 que $H_1 = F$ tiene un único punto fijo en U.

2. Si $\{H_\lambda \mid \lambda \in [0,1]\}$ no está en $\mathscr{C}_{\partial U}(\bar{U}, C)$.
   Para algún $\lambda_0 \in [0,1]$, H_{λ_0} tiene un único punto fijo en el borde ∂U, como $0 \in U$ entonces $\lambda_0 \neq 0$.

   a) Si $\lambda_0 = 1$, entonces $H_1 = F$ tiene un único punto fijo en ∂U.

   b) Si $\lambda_0 \in (0,1)$, entonces H_{λ_0} tiene un único punto fijo $x_0 \in \partial U$ tal que $x_0 = H_{\lambda_0}(x_0) = \lambda_0\, F(x_0)$.

□

Varios teoremas de punto fijo para mapeos contractivos se obtienen del teorema 2.4 al imponer condiciones que impiden que ocurra la segunda posibilidad.

Corolário 2.3. *Sea* C *un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach* $(E, \|\cdot\|)$ *y* U *un subconjunto abierto relativo de* C *con* $0 \in U$. *Si* $F : \bar{U} \longrightarrow C$ *es un mapeo contractivo limitado tal que para todo* $x \in \partial U$ *se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. $\|F(x)\| \leq \|x\|$.

2. $\|F(x)\| \leq \|x - F(x)\|$.

3. $\|F(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - F(x)\|^2$.

4. $\langle F(x), x\rangle \leq \langle x, x\rangle$, *donde* $\langle\ ,\ \rangle$ *es un producto escalar en* E.

Entonces F *tiene un único punto fijo.*

Demostración. Probaremos la afirmación bajo la hipótesis (3).
Supongamos que F no tiene punto fijo, entonces por el teorema 2.4 existe un $z \in \partial U$ tal que $z = \lambda\, F(z)$ para algún $0 < \lambda < 1$; y en particular $F(z) \neq 0$.
Por la hipótesis (3), tenemos

$$\|F(z)\|^2 \leq \|\lambda\, F(z)\|^2 + \|\lambda\, F(z) - F(z)\|^2$$

entonces

$$1 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2$$

esto es una contradicción debido a que

$$\lambda^2 + (1-\lambda)^2 < \lambda + (1-\lambda) = 1 \quad para\ \ todo \quad 0 < \lambda < 1.$$

□

El siguiente resultado representa una versión elemental del teorema antipodal de Borsuk.

Corolário 2.4 (Teorema Antipodal). *Sea U un subconjunto abierto de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$, simétrico con respecto al origen y con $0 \in U$, y sea $F : \bar{U} \longrightarrow E$ un mapeo contractivo limitado tal que $F(x) = -\,F(-x)$ para todo $x \in \partial U$, entonces F tiene un único punto fijo.*

Demostración. Por hipótesis tenemos

$$\|F(x) - F(-x)\| \leq \lambda\, \|2x\|$$

entonces

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \quad para\ \ cada \quad x \in \partial U$$

se sigue del corolario 2.3 que F tiene un único punto fijo. □

Hay varias generalizaciones del teorema de Banach en espacios métricos completos arbitrarios donde la naturaleza contractiva del mapeo se debilita. Muchos de estos resultados se basan en un principio general que involucra las imágenes de bolas cuando sus centros no se mueven demasiado.

Teorema 2.5. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \longrightarrow X$ un mapeo, no necesariamente continuo. Asumiendo que se cumple:*

1. *Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $d(x, F(x)) < \delta$, *entonces* $F[B(x, \epsilon)] \subset B(x, \epsilon)$.

Entonces, si $d(F^n(u), F^{n+1}(u)) \longrightarrow 0$ *para algún* $u \in X$, *la sucesión* $\{F^n(u)\}$ *converge a un punto fijo para* F.

Demostración. Denotamos $u_n = F^n(u)$.

Afirmación 1. $\{u_n\}$ es un sucesión de Cauchy.

Dado $\epsilon > 0$, escogemos N tal que

$$d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\epsilon) \quad para \;\; todo \quad n \geq N$$

ya que $d(u_N, F(u_N)) < \delta$, tenemos

$$F[B(u_N, \epsilon)] \subset B(u_N, \epsilon)$$

así

$$F(u_N) = u_{N+1} \in B(u_N, \epsilon),$$

por inducción,

$$F^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N, \epsilon) \quad para \;\; todo \quad k \geq 0.$$

Así $d(u_k, u_s) \leq d(u_k, u_N) + d(u_N, u_s) < 2\,\epsilon$ para todo $s, k \geq N$ y siendo $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy, por lo tanto converge a algún punto $z \in X$.

Afirmación 2. z es un punto fijo para F.

Supongamos $d(z, F(z)) = a > 0$, podemos escoger

$$u_n \in B(z, a/3) \quad tal \;\; que \quad d(u_n, F(u_n)) < \delta(a/3)\,,$$

entonces

$$F[B(u_n, a/3)] \subset B(u_n, a/3)$$

así

$$F(z) \in B(u_n, a/3)$$

esto es una contradicción debido a que

$$d(F(z), u_n) \geq d(F(z), z) - d(u_n, z) \geq 2a/3$$

por lo tanto

$$d(z, F(z)) = 0.$$

Por las afirmaciones 1 y 2, queda demostrado. □

Para ilustrar algunas de las técnicas utilizadas en la aplicación del teorema 2.5, derivamos dos generalizaciones del principio de contracción de Banach.

Teorema 2.6. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y sea* $F : X \longrightarrow X$ *un mapeo que satisface* $d(F(x), F(y)) \leq \varphi[d(x, y)]$, *donde* $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *es cualquier función no decreciente y no necesariamente continua tal que* $\varphi^n(t) \longrightarrow 0$ *para cada* $t > 0$*, entonces* F *tiene un único punto fijo* u*, y* $F^n(x) \longrightarrow u$ *para cada* $x \in X$.

Demostración. 1. **Existencia.**

Afirmación. $\varphi(t) < t$ para cada $t > 0$

Supongamos que $t \leq \varphi(t)$ para algún $t > 0$, entonces

$$t \leq \varphi(t) \leq \varphi[\varphi(t)]\,,$$

por inducción

$$t \leq \varphi^n(t) \quad para \;\; todo \quad n > 0\,,$$

lo que contradice la hipótesis.

Por la hipótesis

$$d(F(x), F^2(x)) \leq \varphi[d(x, F(x))]$$

y por inducción

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq \varphi^n[d(x, F(x))]$$

así

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \longrightarrow 0 \quad para \;\; cada \quad x \in X.$$

Dado $\epsilon > 0$, escogemos $\delta(\epsilon) = \epsilon - \varphi(\epsilon)$; si $d(x, F(x)) < \delta(\epsilon)$, entonces para cualquier $z \in B(x, \epsilon)$ tenemos

$$d(F(z), x) \leq d(F(z), F(x)) + d(F(x), x) < \varphi[d(z, x)] + \delta \leq \varphi(\epsilon) + \epsilon - \varphi(\epsilon) = \epsilon$$

así

$$F(z) \in B(x, \epsilon)\,,$$

y por el teorema 2.5

$$F^n(x) \longrightarrow u \quad para \;\; cada \quad x \in X$$

tal que u es punto fijo de F.

2. **Unicidad.**

   Sean $u \in X$, $w \in X$ tal que $F(u) = u$ y $F(w) = w$, entonces

$$d(u, w) = d(F(u), F(w)) \leq \varphi[d(u, w)],$$

   lo que es una contradicción, por lo tanto F tiene un único punto fijo.

□

Las situaciones surgen en la teoría de la aproximación donde se sabe que un mapeo es contractivo, con una contracción constante que depende de la distancia entre los puntos considerados. Esto propone la siguiente versión debilitada del teorema de Banach.

Teorema 2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \longrightarrow X$ un mapeo que satisface $d(F(x), F(y)) \leq \alpha(x, y)\, d(x, y)$, para todo $x, y \in X$, donde $\alpha : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tiene la propiedad:*

1. *Para cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$, se cumple que $\lambda(a, b) = \sup\{\, \alpha(x, y) \mid a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$.*

Entonces F tiene un único punto fijo u, y $F^n(x) \longrightarrow u$ para todo $x \in X$.

Demostración. 1. **Existencia.**

Afirmación 1. Para cada $x \in X$, la sucesión $\{d(F^n(x), F^{n+1}(x))\}$ es no creciente y acotada inferiormente.

En efecto:

$$d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) \leq \alpha(F^n(x), F^{n+1}(x))\, d(F^n(x), F^{n+1}(x)),$$

$$d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) \leq \lambda(a, b)\, d(F^n(x), F^{n+1}(x)),$$

$$d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) < d(F^n(x), F^{n+1}(x)),$$

por lo tanto la sucesión converge algún $a \geq 0$.

Afirmación 2. $a = 0$.

Supongamos $a \neq 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \in [a, a+1] \quad para \;\; todo \quad n \geq m,$$

escogemos m y usamos $c = \lambda(a, a+1)$ para obtener, por inducción

$$a \leq d(F^{m+k}(x), F^{m+1+k}(x)) \leq c^k\, d(F^m(x), F^{m+1}(x)),$$

$$a \leq c^k\,(a+1) \quad para \;\; todo \quad k > 0\,,$$

como $c < 1$, esto genera una contradicción.
Dado $\epsilon > 0$, definimos $\lambda = \lambda(\epsilon/2, \epsilon)$ y escogemos $\delta = \min\{\epsilon/2, \epsilon(1-\lambda)\}$.
Sea $d(x, F(x)) < \delta$ y $z \in B(x, \epsilon)$ entonces

$$d(F(z), x) \leq d(F(z), F(x)) + d(F(x), x) \leq \alpha(z, x)\, d(z, x) + d(F(x), x)\,,$$

y consideramos dos casos:

a) $d(z, x) < \epsilon/2$ entonces

$$d(F(z), x) < d(z, x) + d(F(x), x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\,.$$

b) $\epsilon/2 \leq d(z, x) < \epsilon$ entonces

$$d(F(z), x) < \lambda\, d(z, x) + d(F(x), x) < \lambda\epsilon + (1-\lambda)\epsilon = \epsilon\,.$$

así

$$F[B(x, \epsilon)] \subset B(x, \epsilon)\,,$$

se sigue del teorema 2.5 que F tiene un punto fijo.

2. **Unicidad.**
Sean $u \in X$, $w \in X$ tal que $F(u) = u$ y $F(w) = w$, entonces

$$d(u, w) = d(F(u), F(w)) \leq \alpha(u, w)\, d(u, w) < \lambda(u, w)\, d(u, w) < d(u, w)\,,$$

lo que es una contradicción, por lo tanto F tiene un único punto fijo.

□

Hay otra forma de extender el teorema de Banach que no se basa en comparar $d(F(x), F(y))$ con $d(x, y)$, pero se concentra en el comportamiento de $d(x, F(x))$. Varias generalizaciones de este tipo se basan en el siguiente principio general que sucesiones de minimización por adecuadas funciones reales-evaluadas.

Teorema 2.8. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función arbitraria no negativa y no necesariamente continua. Asumiendo que se cumple:*

1. $\mu(a) = \inf\{\varphi(x) + \varphi(y) \mid d(x, y) \geq a\} > 0$ *para todo* $a > 0$.

Entonces cada sucesión $\{x_n\}$ *en* X *donde* $\varphi(x_n) \longrightarrow 0$*; converge a uno y el mismo punto* $u \in X$.

Demostración. Definimos el conjunto $A_m = \{x \,|\, \varphi(x) \leq \varphi(x_m)\}$.

Afirmación 1. El conjunto A_m es no vacío.

Dado $\epsilon = \varphi(x_m)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi(x_n) < \varphi(x_m) \quad para \;\; todo \quad n \geq n_0 \,,$$

entonces $x_n \in A_m$ para todo $n \geq n_0$ además

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \neq \emptyset \,.$$

Afirmación 2. $\delta(A_n) \longrightarrow 0$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi(x_n) < \frac{1}{2}\,\mu(\epsilon) \;\; para \;\; todo \quad n \geq n_0 \,,$$

entonces para cualquier $n \geq n_0$ y $x, y \in A_n$, se tiene

$$\varphi(x) + \varphi(y) < \mu(\epsilon) \,,$$

por hipótesis $d(x,y) < \epsilon$, entonces $\delta(A_n) \leq \epsilon$, por lo tanto $\delta(A_n) \longrightarrow 0$.

Debido a que $\delta(\bar{A}_n) = \delta(A_n)$, concluimos por el teorema de Cantor que existe un único $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$, y $x_n \in \bar{A}_n$.

Afirmación 3. $x_n \longrightarrow u$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que

$$d(x_n, u) < \delta(\bar{A}_n) < \frac{1}{n} \,,$$

entonces

$$d(x_n, u) \longrightarrow 0 \,,$$

se sigue que $x_n \longrightarrow u$.

Para cualquier sucesión $\{y_n\}$ donde $\varphi(y_n) \longrightarrow 0$ tenemos $\varphi(x_n) + \varphi(y_n) \longrightarrow 0$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi(x_n) + \varphi(y_n) < \mu(\epsilon) \;\; para \;\; todo \quad n \geq n_0 \,,$$

entonces $d(x_n, y_n) < \epsilon$, se sigue

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow 0\,,$$

por lo tanto $y_n \longrightarrow u$, lo que concluye la demostración. $\square$

El siguiente teorema de punto fijo es una consecuencia obvia.

Teorema 2.9. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \longrightarrow X$ un mapeo continuo. Asumiendo que la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definido $\varphi(x) = d(x, F(x))$ tiene la propiedad:*

1. $\mu(a) = \text{ínf}\{\, \varphi(x) + \varphi(y) \mid d(x, y) \geq a\} > 0$ *para todo* $a > 0$ *y además* $\text{ínf}\{\, d(x, Fx) \mid x \in X\,\} = 0$.

Entonces F tiene un único punto fijo.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que

$$d(x_n, F(x_n)) < \frac{1}{n}\,,$$

obteniendo la sucesión $\{d(x_n, F(x_n))\}$ tal que

$$d(x_n, F(x_n)) \longrightarrow 0.$$

Se sigue del teorema 2.8 que la sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto $u \in X$.
Afirmación. u es punto fijo único.

1. **Existencia.**

   Por la continuidad de F tenemos $F(x_n) \longrightarrow F(u)$; luego

   $$d(x_n, F(x_n)) \longrightarrow d(u, F(u))\,,$$

   entonces $d(u, F(u)) = 0$, se sigue que $F(u) = u$.

2. **Unicidad.**

   Sea $w \in X$ tal que $F(w) = w$, dado una sucesión $\{y_n\} \subset X$ tal que $y_n \longrightarrow w$, por la continuidad de F tenemos que $F(y_n) \longrightarrow F(w)$ entonces

   $$d(y_n, F(y_n)) \longrightarrow 0\,,$$

   por el teorema 2.8 $y_n \longrightarrow u$, se sigue que $u = w$.

$\square$

2.2. Resultados de la teoría de orden: El teorema de Bishop-Phelps

El teorema de Banach y sus generalizaciones se basan en la noción de completitud, ahora presentaremos algunos teoremas de punto fijo basados en las consideraciones de orden; estos resultados han demostrado ser importantes en álgebra, la teoría de los autómatas, el análisis funcional lineal, la teoría de la aproximación y la teoría de los puntos críticos.

Teorema 2.10 (Knaster-Tarski). *Sea* $(P, \preceq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $F : P \longrightarrow P$ *un mapeo isotono. Asumiendo que existe* $b \in P$ *tal que se cumple:*

1. $b \preceq F(b)$
2. *Cada cadena en* $\{\, x \in P \,|\, x \succeq b\}$ *tiene un supremo.*

Entonces el conjunto de puntos fijos de F *es no vacío, y posee un elemento* λ *maximal en* P.

Demostración. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado

$$Q = \{\, x \,|\, x \preceq F(x)\} \cap \{\, x \,|\, x \succeq b\}\,;$$

notemos que Q es no vacío, pues $b \in Q$.
Afirmación 1. Cada cadena C en Q tiene un límite superior.
En efecto, si $u = sup\, C$, entonces $c \preceq u$ para cada $c \in C$, como F es un mapeo isotono tenemos

$$c \preceq F(c) \preceq F(u) \quad para \;\; cada \quad c \in C\,,$$

mostrando que $F(u)$ es un límite superior para C.
Como $u \preceq F(u)$ entonces $u \in Q$, por el lema de Zorn existe un elemento maximal λ en Q, ya que $\lambda \preceq F(\lambda)$ tenemos

$$F(\lambda) \preceq F[F(\lambda)]\,,$$

así $F(\lambda) \in Q$, y si $\lambda \neq F(\lambda)$ contradice la maximalidad de λ, entonces λ es un punto fijo.
Afirmación 2. λ es el máximo del conjunto $U = \{a \in P \,|\, F(a) = a\}$.

Si existe $a \in U$ tal que $\lambda \preceq a$, como $b \preceq \lambda$ por transitividad $b \preceq a$, entonces $a \in Q$, así $a \preceq \lambda$, se concluye que $a = \lambda$.
Por la afirmación 1 y 2, queda demostrado. □

Observaciones 2.2. *Sea* $F : P \longrightarrow P$ *un mapeo continuo.*

1. *Para cada cadena contable* $\{c_i\}$ *que tiene supremo se cumple* $F(sup\{c_i\}) = sup[\{F(c_i)\}]$.

2. F *es un mapeo isotono.*
   En efecto, si $x \preceq y$, *entonces* $y = sup\{x, y\}$, *por la continuidad tenemos*

$$F(y) = sup\{F(x), F(y)\}$$

   por lo tanto $F(x) \preceq F(y)$.

Para los mapeos continuos $F : P \longrightarrow P$, las condiciones en P en el teorema 2.10 se pueden relajar y se puede encontrar un punto fijo mediante el método de aproximaciones sucesivas. Esto se da en el siguiente teorema.

Teorema 2.11 (Tarski-Kantorovitch). *Sea* $(P, \preceq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $F : P \longrightarrow P$ *un mapeo continuo. Asumiendo que existe* $b \in P$ *tal que se cumple:*

1. $b \preceq F(b)$

2. *Cada cadena en* $\{\, x \in P \,|\, x \succeq b\}$ *tiene un supremo.*

Entonces F *tiene un punto fijo* $u = sup\{F^n(b)\}$, *y* u *es el mínimo del conjunto de puntos fijos de* F *en* $\{\, x \in P \,|\, x \succeq b\}$.

Demostración. Como $b \preceq F(b)$ y F es isotono, entonces $F(b) \preceq F^2(b)$, procediendo inductivamente tenemos

$$F^n(b) \preceq F^{n+1}(b) \quad para \;\; cada \quad n \geq 1.$$

Así $\{F^n(b) \,|\, n \geq 1\}$ es una cadena en $\{\, x \in P \,|\, x \succeq b\}$ y sea $u = sup\{F^n(b)\}$, como F es un mapeo continuo tenemos

$$F(u) = sup\{F^{n+1}(b)\} = u$$

y u es punto fijo.
Sea w cualquier otro punto fijo de F en $\{x \in P \,|\, x \succeq b\}$, como $b \preceq w$, entonces $F(b) \preceq F(w) = w$, por inducción tenemos

$$F^n(b) \preceq w \quad para \;\; todo \quad n \geq 1\,,$$

así w es un límite superior para $\{F^n(b) \,|\, n \geq 1\}$, entonces $u \preceq w$, esto completa la prueba. □

El carácter constructivo de la fórmula para el punto fijo minimal u, en el teorema 2.11 es muy importante para las aplicaciones.
La noción de orden y la noción de completitud han llevado a cada uno a un teorema de punto fijo. Ahora obtenemos algunos resultados basados en una interacción de estas dos nociones.

Definición 2.5. *Sea (X, d) un espacio métrico, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y λ un número positivo, se define la relación $\preceq_{\varphi\,,\,\lambda}$ en X por*

$$x \preceq_{\varphi,\lambda} y \quad si \;\; y \;\; solo \;\; si \quad \lambda\, d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y).$$

Proposición 2.1. *La relación $\preceq_{\varphi\,,\,\lambda}$ es una relación de orden parcial en X.*

Demostración. Probaremos que la relación $\preceq_{\varphi\,,\,\lambda}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. **Reflexiva.**
   Como $\lambda\, d(x, x) \leq \varphi(x) - \varphi(x)$ entonces $x \preceq_{\varphi,\lambda} x$.

2. **Antisimétrica.**
   Si $x \preceq_{\varphi,\lambda} y$ y $y \preceq_{\varphi,\lambda} x$, tenemos $\lambda\, d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \leq -\lambda\, d(y, x)$ entonces $d(x, y) = 0$, por lo tanto $x = y$.

3. **Transitiva.**
   Si $x \preceq_{\varphi,\lambda} y$ y $y \preceq_{\varphi,\lambda} z$, tenemos

$$\lambda\, d(x, z) \leq \lambda\, d(x, y) + \lambda\, d(y, z) \leq \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(y) - \varphi(z) = \varphi(x) - \varphi(z)\,,$$

   entonces $x \preceq_{\varphi,\lambda} z$.

□

Se denotará con $X_{\varphi,\lambda}$, al espacio métrico X con la relación de orden parcial $\preceq_{\varphi,\lambda}$, y con $\preceq$ a la relación $\preceq_{\varphi,1}$, además $X_\varphi = X_{\varphi,1}$.

Observaciones 2.3. *Si* $x, y \in X_{\varphi,\lambda}$ *y se sabe que están relacionados, entonces la condición* $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ *implica que* $\lambda\, d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$, *por lo tanto* $x \preceq_{\varphi,\lambda} y$.

Definición 2.6. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, la función* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama semicontinua inferior siempre que* $\{x \in X \,|\, \varphi(x) \leq a\}$ *es un conjunto cerrado para cada* $a \in \mathbb{R}$.
La función φ *se llamará semicontinua superior, si* $-\varphi$ *es semicontinua inferior.*

Teorema 2.12 (Bishop-Phelps). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y sea* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función semicontinua inferior con límite inferior finito, entonces para cualquier* $x_0 \in X_{\varphi,\lambda}$, *existe un elemento maximal* $x^* \in X_{\varphi,\lambda}$ *con* $x_0 \preceq_{\varphi,\lambda} x^*$.
Precisamente: para cualquier $x_0 \in X$ *existe un* $x^* \in X$ *tal que*

$$\varphi(x^*) + \lambda\, d(x_0, x^*) \leq \varphi(x_0)$$

y

$$\varphi(x^*) < \varphi(x) + \lambda\, d(x, x^*) \quad para \;\; cualquier \quad x \neq x^* \,.$$

Demostración. Podemos suponer que $\lambda = 1$.
Para cualquier $z \in X_\varphi$, consideremos el conjunto $T(z) = \{y \in X_\varphi \,|\, y \succeq z\}$.
El mapeo $f : X_\varphi \longrightarrow X_\varphi$ definido por $f(y) = \varphi(y) + d(z, y)$ es semicontinua inferior.
En efecto, definimos $d_z : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $d_z(y) = d(z, y)$, como d_z es una función semicontinua inferior, se tiene que $d_z + \varphi$ es semicontinua inferior.
En consecuencia $T(z)$ es cerrado en X.
Sea $x_0 \in X_\varphi$, construímos la sucesión creciente $\{x_n\}$, primero escogemos $x_1 \in T(x_0)$ tal que

$$\varphi(x_1) \leq 1 + inf[\varphi | T(x_0)]\,,$$

y procediendo inductivamente $x_n \in T(x_{n-1})$ tal que

$$\varphi(x_n) \leq \frac{1}{n} + inf[\varphi | T(x_{n-1})] \quad para \;\; todo \quad n \geq 1\,.$$

La sucesión $\{T(x_n)\}_{n\geq 0}$ de conjuntos cerrados es decreciente.

En efecto, sea $y_0 \in T(x_n)$, tenemos

$$\varphi(y_0) + d(y_0, x_n) \leq \varphi(x_n)$$

$$\varphi(y_0) + d(y_0, x_{n-1}) - d(x_{n-1}, x_n) \leq \varphi(y_0) + d(y_0, x_n) \leq \varphi(x_n)$$

$$\varphi(y_0) + d(y_0, x_{n-1}) \leq \varphi(x_n) + d(x_{n-1}, x_n) \leq \varphi(x_{n-1})$$

entonces $y_0 \in T(x_{n-1})$, por lo tanto $T(x_{n-1}) \supset T(x_n)$.

Estimamos el diámetro de cada $T(x_n)$ siempre que $n \geq 1$.

Dado $\xi \in T(x_n) \subset T(x_{n-1})$, tenemos

$$\varphi(\xi) \geq inf[\varphi|T(x_{n-1})] \geq \varphi(x_n) - \frac{1}{n}\,,$$

ya que $x_n \preceq \xi$, tenemos

$$d(x_n, \xi) \leq \varphi(x_n) - \varphi(\xi) \leq \frac{1}{n}\,.$$

Esto implica que

$$diam[T(x_n)] \leq \frac{2}{n} \quad para \;\; cada \quad n \geq 1\,,$$

por el teorema de Cantor existe un único $x^* \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T(x_n)$.

Ya que $x^* \in T(x_0)$, tenemos $x^* \succeq x_0$.

Probaremos que x^* es maximal en X_φ.

Supongamos $z \succeq x^*$, para algún $z \in X_\varphi$, entonces

$$z \succeq x^* \succeq x_n \quad para \;\; todo \quad n \geq 0\,,$$

así

$$z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)\,,$$

entonces $z = x^*$, por lo tanto x^* es maximal en X_φ, esto completa la demostración.

$\square$

Teorema 2.13 (Caristi). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función semicontinua inferior con límite inferior finito. Si* $F : X \longrightarrow X$ *es cualquier función no necesariamente continua tal que*

$$d(x, F(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(F(x)) \quad para \;\; cada \quad x \in X\,.$$

Entonces F *tiene un punto fijo.*

Demostración. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado X_φ, y sea x_0 un elemento maximal.
Debido a que

$$d(x_0, F(x_0)) \leq \varphi(x_0) - \varphi(F(x_0)) \,,$$

tenemos $x_0 \preceq F(x_0)$ en X_φ, como x_0 es maximal, se sigue $F(x_0) = x_0$. □

Observaciones 2.4. *La existencia de un punto fijo para un mapeo* $\alpha - contractivo$ F *en un espacio métrico completo* (X, d) *es consecuencia del teorema 2.13.*
En efecto, como $d(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$, *tenemos* $d(F(x), F^2(x)) \leq \alpha\, d(x, F(x))$, *entonces*

$$d(x, F(x)) - \alpha\, d(x, F(x)) \leq d(x, F(x)) - d(F(x), F^2(x)) \,,$$

por lo tanto

$$d(x, F(x)) \leq (1-\alpha)^{-1}[d(x, F(x)) - d(F(x), F^2(x))] \,.$$

Definimos la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $\varphi(x) = (1-\alpha)^{-1} d(x, F(x))$.
Se observa claramente $d(x, F(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(F(x))$.
Afirmación. φ *es semicontinua inferior con límite inferior finito.*
Probaremos que $H = \{y \,|\, (1-\alpha)^{-1} d(y, F(y)) \leq a\}$ *es cerrado para cada* $a \in \mathbb{R}$.
Sea $\{y_n\}$ *una sucesión en* H *tal que* $y_n \longrightarrow y_0$, *tenemos*

$$(1-\alpha)^{-1} d(y_n, F(y_n)) \leq a \quad para \;\; todo \quad n \geq 1$$

como F *es continua*

$$(1-\alpha)^{-1} d(y_n, F(y_n)) \longrightarrow (1-\alpha)^{-1} d(y_0, F(y_0)) \leq a$$

entonces $y_0 \in \bar{H}$, *por lo tanto* H *es cerrado.*
Claramente 0 *es límite inferior para* φ.
Luego φ *satisface la hipótesis del teorema 2.13, entonces* F *tiene un punto fijo.*

Definición 2.7. *Sean* (X, d) *y* (Y, ϱ) *espacios métricos, denotamos con* $(\mathcal{CB}(Y), D)$ *el espacio de subconjuntos no vacíos, cerrados y limitados de* Y *con la métrica Hausdorff*

$$D(A, B) = \text{máx}\{\, \underset{a \in A}{sup}\, \varrho(a, B) \,,\, \underset{b \in B}{sup}\, \varrho(b, A) \,\} \,.$$

Definición 2.8. *Un mapeo* $F : X \longrightarrow \mathcal{CB}(Y)$ *es llamado* $\alpha - contractivo$*, donde* $0 \leq \alpha < 1$*, si*

$$D(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \quad para \;\; todo \quad x, y \in X\,.$$

El siguiente resultado extiende el principio de contracción de Banach a los mapeos contractivos de conjuntos-evaluados.

Teorema 2.14 (Nadler). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y* $F : X \longrightarrow \mathcal{CB}(X)$ *un mapeo* $\alpha - contractivo$*, entonces* F *tiene un punto fijo.*

Demostración. Notemos que para cualquier $x \in X$ y cualquier $y \in F(x)$, tenemos

$$d(y, F(y)) \leq D(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x, y)\,.$$

Dado $\epsilon > 0$, para cualquier $x \in X$ existe $y_\epsilon(x) \in F(x)$ tal que

$$d(x, y_\epsilon(x)) \leq (1 + \epsilon)\, d(x, F(x))\,.$$

De lo anterior obtenemos

$$\left[\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) - \alpha\right] d(x, y_\epsilon(x)) \leq d(x, F(x)) - \alpha\, d(x, y_\epsilon(x))$$

$$\left[\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) - \alpha\right] d(x, y_\epsilon(x)) \leq d(x, F(x)) - d(y_\epsilon(x), F(y_\epsilon(x)))\,,$$

$$d(x, y_\epsilon(x)) \leq \left[\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) - \alpha\right]^{-1} \left[d(x, F(x)) - d(y_\epsilon(x), F(y_\epsilon(x)))\right]\,.$$

Definimos la función $\varphi_\epsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_\epsilon(x) = \left[\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right) - \alpha\right]^{-1} d(x, F(x))$. Elegimos $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)^{-1} > \alpha$, entonces φ_ϵ es continua y limitada. Además, probamos que para cualquier $x \in X$,

$$x \preceq_{\varphi_\epsilon} y_\epsilon(x) \quad y \quad y_\epsilon(x) \in F(x)\,.$$

Por el teorema 2.12, existe un elemento maximal x^* para el orden parcial $\preceq_{\varphi_\epsilon}$ en X_{φ_ϵ}, como $x^* \preceq_{\varphi_\epsilon} y_\epsilon(x^*)$ entonces $x^* = y_\epsilon(x^*)$, por lo tanto $x^* \in F(x^*)$. □

2.3. Aplicaciones: Los teoremas de Danes y Ekeland

Definición 2.9. *Sea E un espacio de Banach, $K = K(z,r) \subset E$ una bola cerrada, para cualquier $x \notin K$, la cápsula convexa de x y K es llamado una disminución y es denotado por $\mathcal{D}(x,K)$.*

Teorema 2.15 (Danes). *Sea E un espacio de Banach, $A \subseteq E$ un subconjunto cerrado, sea $z \in E - A$, y sea $K = K(z,r)$ una bola cerrada tal que $r < R = d(z,A)$.*
Si $F : A \longrightarrow A$ es un mapeo tal que

$$F(a) \in A \cap \mathcal{D}(a,K) \quad para \;\; cada \quad a \in A\,.$$

Entonces para cada $x \in A$, el mapeo F tiene un punto fijo en $A \cap \mathcal{D}(x,K)$.

Demostración. Podemos asumir $z = 0$.
Sea $\|x\| = \varrho \geq R$, hacemos $X = A \cap \mathcal{D}(x,K)$; se observa claramente que F mapea X en sí mismo.
Estimaremos $\|y - F(y)\|$ en X.
Dado $y \in X$, existe $b \in K$ tal que

$$F(y) = tb + (1-t)y\,,$$

como $\|F(y)\| \leq t\|b\| + (1-t)\|y\|$, tenemos

$$t(\|y\| - \|b\|) \leq \|y\| - \|F(y)\|\,,$$

como $\|y\| - \|b\| \geq R - r$, tenemos

$$t \leq \frac{\|y\| - \|F(y)\|}{R-r}\,.$$

Así,

$$\|y - F(y)\| \leq t(\|y - b\|) \leq t(\|y\| + \|b\|) \leq t(\varrho + r)$$
$$\|y - F(y)\| \leq \left(\frac{\varrho + r}{R - r}\right)(\|y\| - \|F(y)\|)\,.$$

Definimos la función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \left(\frac{\varrho + r}{R - r}\right)\|x\|\,,$$

de lo probado anteriormente se observa claramente que φ satisface la hipótesis del teorema 2.13, se concluye que F tiene un punto fijo en $X = A \cap \mathcal{D}(x,K)$, para cada $x \in A$. $\square$

Teorema 2.16. *Sea* E *un espacio de Banach,* $A \subseteq E$ *un subconjunto cerrado, y* $z \in E - A$ *un punto con* $d(z, A) = R > 0,$ *entonces para cualquier* $r < R < \varrho$ *existe un* $x_0 \in \partial A$ *con*

$$\|z - x_0\| \leq \varrho \quad y \quad A \cap \mathcal{D}(x_0, K(z, r)) = \{x_0\} .$$

Demostración. Consideremos el conjunto $H = A \cap K(z, \varrho)$ cerrado en E.
Afirmación 1. H es no vacío.
En efecto, como $d(z, A) = R < \varrho$, existe $y_0 \in A$ tal que

$$R < \|z - y_0\| < \varrho ,$$

por lo tanto H es no vacío.
Sea $K = K(z, r)$.
Afirmación 2. Si para cada $x \in H$ se tiene $A \cap \mathcal{D}(x, K) \neq \{x\}$ entonces $A \cap \mathcal{D}(x, K) = H \cap \mathcal{D}(x, K)$.

1. Como $H \subset A$ entonces $H \cap \mathcal{D}(x, K) \subseteq A \cap \mathcal{D}(x, K)$.

2. Sea $y \in A \cap \mathcal{D}(x, K)$, como $\mathcal{D}(x, K) \subset K(z, \varrho)$, tenemos

   $$A \cap \mathcal{D}(x, K) \subset A \cap K(z, \varrho)$$

   entonces
   $$y \in H = A \cap K(z, \varrho) ,$$

   por lo tanto
   $$A \cap \mathcal{D}(x, K) \subseteq H \cap \mathcal{D}(x, K) .$$

De (1) y (2) concluimos que $A \cap \mathcal{D}(x, K) = H \cap \mathcal{D}(x, K)$.
Afirmación 3. Si $x \in int(A)$ entonces $A \cap \mathcal{D}(x, K) \neq \{x\}$.
Escogemos $0 < \epsilon < 1$, tal que
$$B(x, \epsilon) \subseteq A ,$$

dado un $b \in K$ y como $x \in \mathcal{D}(x, K)$, se tiene

$$[x, b] \subset \mathcal{D}(x, K) ,$$

por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{\epsilon}{n_0\, d(x,b)} < 1$.
Consideremos $y = tx + (1-t)b$, donde $t = 1 - \dfrac{\epsilon}{n_0\, d(x,b)}$, como

$$d(x,y) = \|(1-t)x - (1-t)b\| = (1-t)d(x,b)$$

$$d(x,y) = \frac{\epsilon}{n_0} < \epsilon\,,$$

tenemos $y \in B(x,\epsilon) \subseteq A$, entonces

$$A \cap \mathcal{D}(x,K) \neq \{x\}\,.$$

Sea $F : H \longrightarrow H$ cualquier mapeo que satisface

1. $F(x) \in H \cap \mathcal{D}(x,K)$, para cada $x \in H$.

2. Si $x \in H$ y $A \cap \mathcal{D}(x,K) \neq \{x\}$ entonces $F(x) \neq x$.

Por el teorema 2.15, F tiene un punto fijo $x_0 \in H$.
Si $x_0 \in int(A)$, por la Afirmación 3, se tiene $A \cap \mathcal{D}(x_0,K) \neq \{x_0\}$ entonces $F(x_0) \neq x_0$, lo que es una contradicción, por lo tanto $x_0 \in \partial A$.
Si $H \cap \mathcal{D}(x_0,K) \neq \{x_0\}$, como $H \cap \mathcal{D}(x_0,K) \subseteq A \cap \mathcal{D}(x_0,K)$ entonces

$$A \cap \mathcal{D}(x_0,K) \neq \{x_0\}\,,$$

esto genera una contradicción, por lo tanto

$$H \cap \mathcal{D}(x_0,K) = \{x_0\}\,.$$

Como $\mathcal{D}(x_0,K) \subset K(z,\varrho)$, tenemos

$$A \cap \mathcal{D}(x_0,K) \subseteq A \cap K(z,\varrho) = H\,,$$

entonces $A \cap \mathcal{D}(x_0,K) \subseteq H \cap \mathcal{D}(x_0,K)$ por lo tanto

$$A \cap \mathcal{D}(x_0,K) = H \cap \mathcal{D}(x_0,K) = \{x_0\}\,.$$

□

Definición 2.10. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función, si se tiene que* $\eta = \inf\{\,\varphi(x) \mid x \in X\}$ *es finito, se llama un minimizador de* φ *a un elemento* $x_0 \in X$ *con* $\varphi(x_0) = \eta$.

Definición 2.11. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función, si se tiene que* $\eta = \inf\{\, \varphi(x) \mid x \in X\}$ *es finito, se llama un estricto minimizador de* φ *a un elemento* $x_0 \in X$ *tal que la relación* $\varphi(z) \leq \varphi(x_0)$ *implica* $z = x_0$.

Definición 2.12. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función, si se tiene que* $\eta = \inf\{\varphi(x) \,|\, x \in X\}$ *es finito, a una sucesión* $\{x_n\}$ *en* X *donde* $\varphi(x_n) \longrightarrow \eta$ *es llamada una sucesión de minimización para* φ.

Teorema 2.17 (Ekeland). *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función semicontinua inferior con límite inferior finito* η*. Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión de minimización para* φ *y* $\lambda_n = (\varphi(x_n) - \eta)^{1/2} > 0$.
Entonces existe una sucesión de minimización $\{y_n\}$ *para* φ *tal que para cualquier natural* n *tenemos:*

1. $\varphi(y_n) \leq \varphi(x_n)$ *y* $d(x_n, y_n) \leq \lambda_n$,
2. y_n *es un estricto minimizador de la función* $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) + \lambda_n\, d(z, y_n) \quad para \quad z \in X\,.$$

3. $\varphi(y_n) = \varphi_n(y_n) \leq \varphi(z) + \lambda_n\, d(z, y_n)$ *para* $z \in X$.

Demostración. Construiremos la sucesión $\{y_n\}$ en X.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el espacio X_{φ,λ_n}, donde $\lambda_n = (\varphi(x_n) - \eta)^{1/2}$.
Por el teorema 2.12, para cada $x_n \in X_{\varphi,\lambda_n}$ existe un elemento maximal

$$y_n \in X_{\varphi,\lambda_n} \quad tal \;\; que \quad x_n \preceq_{\varphi,\lambda_n} y_n\,.$$

1. De la relación $x_n \preceq_{\varphi,\lambda_n} y_n$ en X_{φ,λ_n}, se tiene

$$\varphi(y_n) + \lambda_n\, d(x_n, y_n) \leq \varphi(x_n)\,,$$

entonces $\varphi(y_n) \leq \varphi(x_n)$.
Como $\varphi(x_n) = \lambda_n^2 + \eta$ y $\eta \leq \varphi(y_n)$, entonces

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{\lambda_n}(\varphi(x_n) - \varphi(y_n)) \leq \frac{1}{\lambda_n}(\eta + \lambda_n^2 - \eta)$$

$$d(x_n, y_n) \leq \lambda_n\,.$$

2. Supongamos que $\varphi_n(z) \leq \varphi_n(y_n)$ para algún $z \in X$, tenemos

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) + \lambda_n\, d(z, y_n) \leq \varphi_n(y_n)\,,$$

entonces $y_n \preceq_{\varphi,\lambda_n} z$, como y_n es maximal en X_{φ,λ_n}, la relación implica que $y_n = z$, esto prueba que y_n es un estricto minimizador de φ_n.

3. Como y_n es un estricto minimizador de la función φ_n, tenemos

$$\varphi_n(y_n) \leq \varphi_n(z) = \varphi(z) + \lambda_n\, d(z, y_n) \quad para \quad z \in X\,.$$

Hacemos $z = y_n$ y evaluando en φ_n tenemos $\varphi_n(y_n) = \varphi(y_n)$.

Como $\varphi(x_n) \longrightarrow \eta$ entonces $\lambda_n \longrightarrow 0$, debido a esto la sucesión $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$. De (3) tenemos

$$\eta \leq \varphi(y_n) \leq \varphi(x_n) - \lambda_n\, d(x_n, y_n)\,,$$

entonces $\varphi(y_n) \longrightarrow \eta$, por lo tanto $\{y_n\}$ es una sucesión minimizadora para φ, esto completa la demostración. $\square$

Corolário 2.5. *Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en E con límite inferior finito η, y $\{x_n\}$ una sucesión de minimización para φ. Entonces existe una sucesión de minimización $\{y_n\}$ en E para φ tal que*

$$\varphi(y_n) \leq \varphi(x_n) \quad para \;\; cada \quad n \quad y \quad D\,\varphi(y_n) \longrightarrow 0 \quad en \;\; E^*\,.$$

Demostración. Por el teorema 2.17, existe una sucesión de minimización $\{y_n\}$ en E para φ tal que para todo n,

$$\varphi(y_n) \leq \varphi(x_n) \quad y \;\; con \quad \lambda_n = (\varphi(x_n) - \eta)^{1/2}\,.$$

Además

$$\varphi(y_n) \leq \varphi(z) + \lambda_n\,\|z - y_n\| \quad para \;\; todo \quad z \in E\,. \qquad (*)$$

Hacemos $z = y_n + v$, reemplazamos en $(*)$ obtenemos

$$\varphi(y_n) \leq \varphi(y_n + v) + \lambda_n\,\|(y_n + v) - y_n\|$$

$$\varphi(y_n) \leq \varphi(y_n + v) + \lambda_n\,\|v\| \quad para \;\; todo \quad v \in E\,,$$

Luego,

$$\|D\,\varphi(y_n)\|_{E^*} = \lim_{\varrho \longrightarrow 0} \sup_{\substack{\|v\| \leq \varrho \\ v \neq 0}} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_n + v)}{\|v\|} \leq \lambda_n \,.$$

Así

$$\|D\,\varphi(y_n)\|_{E^*} \leq \lambda_n \quad para \;\; todo \quad n \,,$$

como $\lambda_n \longrightarrow 0$, entonces $D\,\varphi(y_n) \longrightarrow 0$, esto completa la demostración. $\square$

Capítulo 3

Teoremas de Borsuk y Brouwer

El objetivo de este capítulo es establecer el teorema de Borsuk y su consecuencia inmediata, el teorema del punto fijo de Brouwer. Obtenemos estos resultados al establecer primero el teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk sobre la n-esfera. Nuestro enfoque es elemental, ya que involucra solo a algunos descomposiciones simples de la esfera y un lema combinatorio

3.1. Teorema de Borsuk-Ulam y sus formulaciones equivalentes

Definición 3.1. *Sea* E *un espacio lineal normado, un* $k - plano$ *en* E *es un subconjunto de la forma*

$$a + L = \{a + v \,|\, v \in L\},$$

donde L *es un subespacio vectorial en* E *de dimensión* k*, y* $a \in E$*.*

Definición 3.2. *Sea* E *un espacio lineal normado, un conjunto finito de* $s+1$ *puntos en* E *es llamado afinmente independiente si no está contenido en cualquier* $(s-1)-plano$ *de* E*.*

Definición 3.3. *Sea* $\{p_0, p_1, ..., p_s\}$ *un conjunto afinmente independiente de* $s + 1$ *puntos en* E*, su cápsula convexa*

$$\{x \in E \,|\, x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i p_i \,;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1,\; \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\}$$

se llama $s - simplex$ *con vértices* $p_0, p_1, ..., p_s$ *y es denotado por* $[p_0, ..., p_s]$.
Si los vértices no son mencionados explicitamente, un simplex es denotado por σ *o* σ^s*, el índice superior indica su dimensión.*

Definición 3.4. *El* $k - simplex$ *generado por cualquier* $k+1$ *vértices de los* $p_0, ..., p_s$ *es llamado una* $k - cara$ *de* σ^s*.*

Observaciones 3.1.

1. *La única* $s - cara$ *de* σ^s *es* σ^s *misma.*
2. *Las* $0 - caras$ *de* σ^s *son sus vértices.*
3. *Las* $1 - caras$ *denotadas por* $[p_i, p_j]$ *se llaman los bordes de* σ^s*, pues* σ^s *es convexo.*
4. *El diámetro de* σ^s *denotado por* $\delta(\sigma^s)$ *es la longitud mas larga de sus bordes.*

Definición 3.5. *El borde* $\partial\sigma^s$ *(no necesariamente el borde topológico de* σ^s *en* E*), es la unión de todas las caras de dimensión menor igual que* $s - 1$*.*

Observaciones 3.2. *El* $s - simplex$ *abierto es* $\sigma^s - \partial\sigma^s$*.*

Proposición 3.1. *Un* $s - simplex$ $\sigma^s = [p_0, ...p_s]$ *es un espacio métrico compacto.*

Demostración. Definimos la métrica $d : \sigma^s \times \sigma^s \longrightarrow \mathbb{R}$ por $d(x, y) = \|x - y\|$.
Siendo E un espacio lineal normado, existe un espacio de Banach E^* tal que $A = \{p_0, ..., p_s\} \subset E^*$, entonces $\overline{conv(A)} = conv(A)$ es compacto, por lo tanto (σ^s, d) es un espacio métrico compacto. □

Observaciones 3.3.

1. *Cada* $x \in \sigma^s = [p_0, ...p_s]$ *se puede escribir de manera única como*

$$x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(x)\, p_i \,; \quad donde \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i(x) = 1 \quad y \quad 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \,,$$

Supongamos que

$$x = \sum_{i=0}^{s} r_i(x)\, p_i \,; \quad donde \quad \sum_{i=0}^{s} r_i(x) = 1 \quad y \quad 0 \leq r_i(x) \leq 1 \,,$$

entonces

$$\sum_{i=0}^{s} [\lambda_i(x) - r_i(x)]\, p_i = 0 \,; \quad donde \quad \sum_{i=0}^{s} [\lambda_i(x) - r_i(x)] = 0 \,,$$

como $\{p_0, p_1, ..., p_s\}$ *es afinmente independiente tenemos*

$$\lambda_i(x) - r_i(x) = 0 \quad para \;\; cada \quad i = 0, ..., s\,;$$

por lo tanto $\lambda_i(x) = r_i(x)$, *para cada* $i = 0, ..., s$.

2. *La* $(s+1) - upla$ $(\lambda_0(x), ..., \lambda_s(x))$ *de números reales es llamada las coordenadas baricéntricas de* $x \in \sigma^s$.

3. *Cada* $\lambda_i : \sigma^s \longrightarrow [0,1]$ *es llamada la* i*-ésima función coordenada baricéntrica de* σ.

Proposición 3.2. *Cualquier dos* $s-simplex$ *en* E *son afinmente homeomórficas, además, para cualquier simplex* σ^s, *cada una de sus funciones coordenadas baricéntricas* $\lambda_i : \sigma^s \longrightarrow [0,1]$ *es continua.*

Demostración. Sea $\mathbb{R}^{s+1}$ el espacio Euclideano de dimensión $(s+1)$ y $\Delta^s \subset \mathbb{R}^{s+1}$ el $s-simplex$ que tiene a los puntos afinmente independientes $e_0 = (1, 0, ..., 0), ..., e_s = (0, 0, ..., 1)$ en $\mathbb{R}^{s+1}$ como vértices, así

$$\Delta^s = \{x = (x_0, ..., x_s) \in \mathbb{R}^{s+1} \,|\, x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i e_i\,;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1,\; \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\}\,,$$

entonces

$$\Delta^s = \{(\lambda_0, ..., \lambda_s) \in \mathbb{R}^{s+1} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1,\; \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\}\,.$$

Dado cualquier $s - simplex$ $\sigma^s = [p_0, ..., p_s] \subset E$.

Afirmación. σ^s es afinmente homeomórfica a Δ^s.

Sea $h : \mathbb{R}^{s+1} \longrightarrow E$ el mapeo definido por

$$h(\lambda_0, ..., \lambda_s) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i\,;$$

dado una sucesión $\{(\lambda_{0_n}, ..., \lambda_{s_n})\} \subset \mathbb{R}^{s+1}$ tal que $(\lambda_{0_n}, ..., \lambda_{s_n}) \longrightarrow (\lambda_0, ..., \lambda_s)$, ya que

$$h(\lambda_{0_n}, ..., \lambda_{s_n}) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_{i_n} \, p_i\,,$$

entonces

$$h(\lambda_{0_n}, ..., \lambda_{s_n}) \longrightarrow \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i = h(\lambda_0, ..., \lambda_s)\,,$$

por lo tanto h es continua.

Probaremos que $h(\Delta^s) = \sigma^s$.

Sea $x \in h(\Delta^s)$, tenemos

$$x = h(\lambda_0, ..., \lambda_s) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i \ ; \ \ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ ; \ \ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1 \ ,$$

entonces $x \in \sigma^s$, así $h(\Delta^s) \subset \sigma^s$.

Dado $x \in \sigma^s$ tenemos

$$x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i \ , \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ , \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1 \, ,$$

entonces existe $(\lambda_0, ..., \lambda_s) \in \Delta^s$ tal que

$$h(\lambda_0, ..., \lambda_s) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i = x \, ,$$

entonces $x \in h(\Delta^s)$, así $\sigma^s \subset h(\Delta^s)$, por lo tanto $h(\Delta^s) = \sigma^s$.

Definimos $g = h|\Delta^s : \Delta^s \longrightarrow \sigma^s$ es evidente que g es sobreyectiva.

Probaremos que $g : \Delta^s \longrightarrow \sigma^s$ es inyectiva.

Sean $(\lambda_0, ..., \lambda_s), (r_0, ..., r_s) \in \Delta^s$ tal que

$$g(\lambda_0, ..., \lambda_s) = g(r_0, ..., r_s) \, ,$$

tenemos

$$\sum_{i=0}^{s} \lambda_i \, p_i = \sum_{i=0}^{s} r_i \, p_i \quad ; \quad \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{s} r_i = 1 \, ,$$

así

$$\sum_{i=0}^{s} (\lambda_i - r_i) \, p_i = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^{s} (\lambda_i - r_i) = 0 \, ,$$

como $\{p_0, ..., p_s\}$ es afinmente independiente, se tiene

$$\lambda_i = r_i \quad para \ \ cada \quad i = 0, ..., s \, ,$$

entonces $(\lambda_0, ..., \lambda_s), (r_0, ..., r_s)$, por lo tanto g es inyectiva.

De lo anterior tenemos que g es biyectiva.

Como $g : \Delta^s \longrightarrow \sigma^s$ es un mapeo continuo y biyectivo, además Δ^s, σ^s son compactos entonces g^{-1} es continuo, por lo tanto g es un afín homeomorfismo.

Luego, sea ν^s cualquier otro $s - simplex$ entonces existe un homeomorfismo

$f : \nu^s \longrightarrow \Delta^s$, como $gof : \nu^s \longrightarrow \sigma^s$ es un homeomorfismo, se concluye que cualquier dos $s - simplex$ son afinmente homeomórfica.
Ahora probaremos que las funciones coordenadas baricéntricas son continuas.
Sea $\pi_i : \mathbb{R}^{s+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función proyección, ya que $\lambda_i = \pi_i o g^{-1}$ y π_i, g^{-1} son continuas entonces λ_i es continua, esto completa la demostración. □

Debido a que usaremos simpleces en todo momento, es conveniente trabajar con una norma equivalente para el espacio euclidiano bajo el cual la esfera unitaria puede considerarse como la unión de los simpleces geométricos.

Definición 3.6. *Sea E el espacio normado de todas las sucesiones $x = \{x_1, x_2, ...\}$ de números reales que tienen a lo mas un numero finito de $x_N \neq 0$, con la norma $\|x\| = \sum |x_i|$.*

1. *El subconjunto $\{x \in E \mid x_i = 0 \ \ para \ \ todo \ \ i > n\}$ es denotado por E^n.*

2. *La $n - bola$ unitaria cerrada es denotada por $K^n = \{\, x \in E^n \mid \|x\| \leq 1\}$.*

3. *La $n-esfera$ unitaria es $S^n = \{x \in E^{n+1} \mid \|x\| = 1\,\}$; su hemisferio superior es $S^n_+ = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\,\}$, y su hemisferio inferior es $S^n_- = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\,\}$; claramente $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$.*

Observaciones 3.4. 1. *Para cualquier $k < n$, tenemos*

$$S^k = \{x \in S^n \mid x_{k+2} = ... = x_{n+1} = 0\,\}\,,$$

y que $S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$.

2. *Dado un espacio lineal normado L^n de dimensión n, existe un homeomorfismo de L^n en E^n. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base de L^n, definimos*

$$f : L^n \longrightarrow E^n \quad por \quad f(x) = \{x_1, ..., x_n, 0, ...\}\,, \quad donde \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i\,.$$

a) *Sea $\{x_m\} \subset L^n$ una sucesión tal que $x_m \longrightarrow x_0$, donde*

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} x_{i_m}\, v_i \quad y \quad x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_{i_0}\, v_i\,,$$

como

$$f(x_m) = \{x_{1_m}, ..., x_{n_m}, 0, ...\} \quad y \quad x_{i_m} \longrightarrow x_{i_0}\,, \quad i = 1, ..., n\,;$$

entonces $f(x_m) \longrightarrow f(x_0)$, por lo tanto f es continua.

b) *Sean* $x, y \in L^n$ *tal que* $f(x) = f(y)$, *como*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i \;; \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, v_i \;;$$

tenemos

$$\{x_1, ..., x_n, 0, ...\} = \{y_1, ..., y_n, 0, ...\}\,,$$

entonces $x_i = y_i$, $i = 1, ..., n$; *por lo tanto* $x = y$, *concluimos que* f *es inyectiva.*

c) *Sea* $\{x_1, ..., x_n, 0, ...\} \in E^n$, *existe* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, v_i$ *en* L^n *tal que* $f(x) = \{x_1, ..., x_n, 0, ...\}$, *por lo tanto* f *es sobreyectiva.*

d) *Tenemos* $E^n \subset l^1$, *probaremos que* E^n *es cerrado.*
Sea $x_0 \in \overline{E^n}$, *existe una sucesión* $\{x_m\} \subset E^n$ *tal que* $x_m \longrightarrow x_0$, *como*

$$x_m = \{x_{1_m}, ..., x_{n_m}, 0, ...\}\,,$$

tenemos

$$x_{i_m} \longrightarrow x_{i_0} \;; \;\; i = 1, ..., n\,;$$

entonces $x_0 = \{x_{1_0}, ..., x_{n_0}, 0, ...\} \in E^n$, *por lo tanto* $E^n = \overline{E^n}$, *concluimos que* E^n *es un espacio de Banach.*

e) *Sean* $x, y \in L^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *donde* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, v_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\, v_i$, *tenemos*

$$f(\lambda\, x + y) = \{\lambda\, x_1 + y_1, ..., \lambda\, x_n + y_n, 0, ...\}\,,$$

$$f(\lambda\, x + y) = \lambda\,\{x_1, ..., x_n, 0, ...\} + \{y_1, ..., y_n, 0, ...\}\,,$$

$$f(\lambda\, x + y) = \lambda\, f(x) + f(y)\,,$$

entonces f *es lineal.*
Siendo L^n *y* E^n *espacios de Banach y* f *lineal entonces* f^{-1} *es continuo.*

De lo anterior, se sigue que f *es un homeomorfismo.*

Por una triangulación de S^n se entiende una descomposición de S^n en simpleces que se pegan juntos a lo largo de caras comunes de una manera ordenada.

Definición 3.7. *Una familia finita* $\mathscr{S}^n = \{\sigma\}$ *de simpleces en* S^n *es llamado una triangulación de* S^n *siempre que:*

1. *La intersección de cualquier dos simpleces en* $\mathscr{S}^n$ *es vacío o es una cara en común.*

2. *Si* $\sigma \in \mathscr{S}^n$ *entonces toda cara de* σ *está en* $\mathscr{S}^n$*.*

3. $S^n = \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \mathscr{S}^n\}$*.*

4. *Cada* $(n-1)-simplex$ *de* $\mathscr{S}^n$ *es la cara común de exactamente dos* $n-simpleces$ *en* $\mathscr{S}^n$*.*

Observaciones 3.5. *1. Para cada* $i = 1, ..., n+1$*, sea* $e_i = \{\delta_1^i, \delta_2^i, ...\} \in E$*, donde* δ_j^i *es el delta Kronecker; la bola unitaria* K^{n+1} *es precisamente la cápsula convexa del conjunto* $\{e_1, ..., e_{n+1}, -e_1, ..., -e_{n+1}\}$*.*
La bola unitaria K^{n+1} *es un conjunto convexo tal que*

$$A = \{e_1, ..., e_{n+1}, -e_1, ..., -e_{n+1}\} \subset K^{n+1} \, ,$$

entonces $conv(A) \subset K^{n+1}$*.*
Sea $y = \{y_1, ..., y_{n+1}, 0, ...\} \in \partial K^{n+1}$ *donde* $\|y\| = \sum\limits_{i=1}^{n+1} |y_i| = 1$*, tenemos*

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} |y_i| \, (sgn(y_i) \, e_i) \;\; ; \quad \sum_{i=1}^{n+1} |y_i| = 1 \, ,$$

entonces $y \in conv(A)$*, así* $\partial K^{n+1} \subset conv(A)$*.*
Si $x \in int(K^{n+1})$*, tomamos* $y \in \partial K^{n+1}$ *entonces* $[y, x] \subset K^{n+1}$*, se sabe*

$$\{t\, y + (1-t)\, x \mid t \in \mathbb{R}\} \cap K^{n+1} = \{z\} \quad donde \quad z \in \partial K^{n+1} \, ,$$

luego

$$x \in [y, z] \subset conv(A) \, ,$$

así $int(K^{n+1}) \subset conv(A)$*, entonces* $K^{n+1} \subset conv(A)$*, concluimos* $K^{n+1} = conv(A)$*.*

2. *El conjunto de todos los* $n - simpleces$ $[\pm\, e_1, ..., \pm\, e_{n+1}]$ *y todas sus caras proporcionan una triangulación de* S^n, *llamada la triangulación básica, ésta triangulación es denotado por* Σ^n.
   Cada simplex de Σ^n *será representada de forma única por* $[\pm\, e_{i_0}, ..., \pm\, e_{i_s}]$ *donde* $i_0 < ... < i_s$.
   Sea Σ^n *la familia de todos los* $n - simpleces$ $[\pm\, e_1, ..., \pm\, e_{n+1}]$ *y todas sus caras.*

   a) *Sean* $\sigma^k = [\pm\, e_{i_0}, ..., \pm\, e_{i_k}]$, $\nu^s = [\pm\, e_{j_0}, ..., \pm\, e_{j_s}]$ *dos simpleces en* Σ^n.
   Definimos

   $$H = \{\pm\, e_{i_w} \mid \pm\, e_{i_w} = \pm\, e_{j_t} \quad para \;\; algun \;\; entero \quad 0 \le t \le s; \;\; 0 \le w \le k; \;\; w \in \mathbb{Z}\}\,.$$

   Como $H \subset \sigma^k$ *y* $H \subset \nu^s$ *entonces* $conv(H) \subset \sigma^k \cap \nu^s$.
   Sea $x \in \sigma^k \cap \nu^s$ *entonces*

   $$x = \sum_{w=0}^{k} \lambda_w\,(\pm\, e_{i_w})\;; \;\; \sum_{w=0}^{k} \lambda_w = 1\;; \;\; 0 \le \lambda_w \le 1$$

   y

   $$x = \sum_{t=0}^{s} r_t\,(\pm\, e_{j_t})\;; \;\; \sum_{t=0}^{s} r_t = 1\;; \;\; 0 \le r_t \le 1\,,$$

   se cumple que:
   Si $\pm\, e_{i_w} = \pm\, e_{j_t}$ *entonces* $\lambda_w = r_t \neq 0$.
   Si $\pm\, e_{i_w} \neq \pm\, e_{j_t}$ *entonces* $\lambda_w = r_t = 0$.
   Luego

   $$x = \sum \lambda_w\,(\pm\, e_{i_w})\;; \;\; \sum \lambda_w = 1\;; \;\; 0 < \lambda_w \le 1\,,$$

   entonces $x \in conv(H)$, *se tiene* $\sigma^k \cap \nu^s \subset conv(H)$, *por lo tanto* $\sigma^k \cap \nu^s = conv(H)$.
   Concluimos que $\sigma^k \cap \nu^s$ *es vacío si* $H = \emptyset$ *y es una cara si* $H \neq \emptyset$.

   b) *Es consecuencia obvia de la definición de* Σ^n.

   c) *Probaremos que* $S^n = \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\}$.
   Sea $x = (x_1, ..., x_{n+1}, 0, ...) \in S^n$ *tenemos*

   $$x = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|\,(sgn(x_i)\; e_i) \;\;, \quad \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1\,;$$

si $x_i = 0$ *haremos* $sgn(x_i) = 1$ *entonces*

$$x \in [(sgn(x_1)\, e_1), ..., (sgn(x_{n+1})\, e_{n+1})]\,;$$

así $x \in \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\}$, *por lo tanto*

$$S^n \subset \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\}\,.$$

Sea $x \in \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\}$ *entonces existe un simplex tal que*

$$x \in [\pm\, e_{i_0}, ..., \pm\, e_{i_s}]\,,$$

tenemos

$$x = \sum_{t=0}^{s} r_t\,(\pm\, e_{j_t})\ ;\quad \sum_{t=0}^{s} r_t = 1\ ;\quad 0 \le r_t \le 1\,;$$

como

$$\|x\| = \sum_{t=0}^{s} |r_t| = 1\,,$$

entonces $x \in S^n$, *así*

$$\bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\} \subset S^n\,,$$

concluimos $S^n = \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma^n\}$.

d*) Sea* σ *un* $(n-1)-simplex$, *sin perder generalidad podemos asumir* $\sigma = [e_1, ..., e_n]$, *por lo probado en* (a) *tenemos*

$$\sigma = [e_1, ..., e_n, e_{n+1}] \cap [e_1, ..., e_n, -\, e_{n+1}]\,,$$

concluimos que σ *es la cara común de exactamente dos* $n - simpleces$.

De (a), (b), (c) y (d) *concluimos que* Σ^n *es una triangulación de* S^n.

Definición 3.8. *Sea* $\alpha : S^n \longrightarrow S^n$ *el mapeo antipodal definido por* $\alpha(x) = -\,x$; *dos elementos de cualquier tipo (puntos, simpleces, conjuntos) correspondiente a* α *serán llamados antipodal.*
Para cada $k < n$, *la restricción* $\alpha|S^k$ *es el mapeo antipodal de* S^k.

Observaciones 3.6. *Ningún simplex de* Σ^n *contiene un par de vértices antipodal y para cada simplex* $\sigma^k \in \Sigma^n$ *el conjunto* $\alpha(\sigma^k)$ *es un simplex en* Σ^n.

1. Sean e_i, y $-e_i$ un par de vértices antipodal.
   Supongamos que existe $\sigma^s \in \Sigma^n$ tal que $e_i, -e_i \in \sigma^s = [\pm e_{j_0}, ..., \pm e_{j_s}]$, tenemos
   $$e_i = \sum_{t=0}^{s} \lambda_t \,(\pm e_{j_t}) \;;\;\; \sum_{t=0}^{s} \lambda_t = 1 \;;\;\; 0 \leq \lambda_t \leq 1$$
   y
   $$-e_i = \sum_{t=0}^{s} r_t \,(\pm e_{j_t}) \;;\;\; \sum_{t=0}^{s} r_t = 1 \;;\;\; 0 \leq r_t \leq 1 \,;$$
   entonces
   $$\sum_{t=0}^{s} (\lambda_t - r_t)\,(\pm e_{j_t}) = 0 \;;\;\; \sum_{t=0}^{s} (\lambda_t - r_t) = 0 \,;$$
   obtenemos $\lambda_t = r_t$ para cada $t = 0, ..., s$; así $e_i = -e_i$ lo que es una contradicción, por lo tanto ningún simplex de Σ^n contiene un par de vértices antipodal.
2. Sea $\sigma^k \in \Sigma^n$, asumimos sin perder generalidad que $\sigma^k = [e_{i_0}, ..., e_{i_k}]$, tenemos
   $$\alpha(\sigma^k) = \{-x \in E \mid x = \sum_{t=0}^{k} \lambda_t \, e_{i_t} \;;\;\; \sum_{t=0}^{k} \lambda_t = 1 \;;\;\; 0 \leq \lambda_t \leq 1\}$$
   $$\alpha(\sigma^k) = \{-x \in E \mid -x = \sum_{t=0}^{k} \lambda_t \,(-e_{i_t}) \;;\;\; \sum_{t=0}^{k} \lambda_t = 1 \;;\;\; 0 \leq \lambda_t \leq 1\} \,,$$
   entonces $\alpha(\sigma^k) = [-e_{i_0}, ..., -e_{i_k}]$ es un simplex en Σ^n.

Definición 3.9. *Una triangulación $\mathscr{S}^n$ de S^n es llamada simétrica si:*

1. *Para cada $k \leq n$, la $k-esfera$ S^k es la unión de $k-simpleces$ de $\mathscr{S}^n$.*
2. *Para cada $k \leq n$, y cada simplex $\sigma^k \in \mathscr{S}^n$, el conjunto $\alpha(\sigma^k)$ es un $k-simplex$ de $\mathscr{S}^n$.*

Observaciones 3.7. *Σ^n es una triangulación simétrica de S^n.*

Es consecuencia inmediata de lo probado anteriormente.

Definición 3.10. *Sean $\mathscr{S}^k$ y $\mathscr{S}^n$ triangulaciones de S^k y S^n respectivamente, un mapeo $f : \mathscr{S}^k \longrightarrow \mathscr{S}^n$ de los vértices de $\mathscr{S}^k$ en los vértices de $\mathscr{S}^n$ es llamado un mapeo vértice simplicial si para cada simplex $[p_0, ..., p_s]$ de $\mathscr{S}^k$, los puntos*

$f(p_0),...,f(p_s)$ *son los vértices de un simplex (posiblemente de menor dimensión) de* $\mathscr{S}^n$.
Claramente f *se extiende a un mapeo* $f : S^k \longrightarrow S^n$ *enviando simpleces de* $\mathscr{S}^k$ *en simpleces de* $\mathscr{S}^n$.

Definición 3.11. *Sea* $\mathscr{S}^k$ *una triangulación arbitraria de* S^k *y* $f : \mathscr{S}^k \longrightarrow \Sigma^n$ *un mapeo vértice simplicial.*
Un $r - simplex$ $[p_0,...,p_r]$ *de* $\mathscr{S}^k$ *es llamado positivo si:*

1. *Los vértices* $f(p_0),...,f(p_r)$ *generan un* $r - simplex$ $\sigma^r \in \Sigma^n$.
2. *La forma estandar de* σ^r *está expresado alternando signo,*

$$\sigma^r = [\,+\,e_{i_0},\,-\,e_{i_1},...,(-1)^r\,e_{i_r}\,]\,,$$

con el primer vértice positivo.

Un $r - simplex$ *de* $\mathscr{S}^k$ *es negativo si su* $f - imagen$ *es un* $r - simplex$ *de* Σ^n *que en su forma estandar, es alternando en signo y tiene su primer vértice negativo.*
Un $r - simplex$ *de* $\mathscr{S}^k$ *que no es positivo ni negativo es llamado neutral.*

Definición 3.12. *Sea* $f : \mathscr{S}^k \longrightarrow \Sigma^n$ *cualquier mapeo vértice simplicial y cualquier subconjunto* $L \subset \mathscr{S}^k$, *el numero de* $r - simpleces$ *positivo en* L *bajo* f *es denotado por* $p(f, L, r)$.

Proposición 3.3. *Sea* $f : \mathscr{S}^k \longrightarrow \Sigma^n$ *un mapeo vértice simplicial de una triangulación simétrica de* S^k *en* Σ^n, *donde* $k \leq n$.
Si $\alpha\, o\, f = f\, o\, \alpha$, *entonces*

$$p(f, S^k, k) \equiv p(f, S^{k-1}, k-1)\, mod\, 2\,.$$

Demostración. Consideremos el hemisferio superior S^k_+ de S^k, y descomponemos el conjunto de $k - simpleces$ en S^k_+ en tres clases disjuntas:

$$\mathscr{A}_+ = \{\, s^k \subset S^k_+ \mid s^k \ \ es \ \ positivo \,\}\,,$$

$$\mathscr{A}_- = \{\, s^k \subset S^k_+ \mid s^k \ \ es \ \ negativo \,\}\,,$$

$$\mathscr{A}_0 = \{\, s^k \subset S^k_+ \mid s^k \ \ es \ \ neutral \,\}\,.$$

Considerar la suma

$$T = \sum_{s^k \in \mathscr{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathscr{A}_-} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathscr{A}_0} p(f, s^k, k-1)\,;$$

determinaremos la paridad de T.

Notar que, como cada $p(f, s^k, k-1)$ es el numero de $(k-1)-caras$ positivas de s^k, la suma T involucra todos los s^{k-1} positivos en S^k_+.

Observar que cada s^{k-1} positivo que no está en S^{k-1} ocurrirá dos veces en la suma T, ya que es la cara de exactamente dos s^k; porque cada s^{k-1} positivo en S^{k-1} es la cara de solo un $s^k \in S^k_+$, concluimos que

$$T \equiv p(f, S^{k-1}, k-1)\, mod\, 2\,.$$

Ahora desarrollaremos otra expresión para T.

Consideremos cualquier s^k neutral, ya que s^k no puede tener $(k-1)-cara$, a no ser que $dim\, f(s^k) \geq k-1$, podemos escribir

$$f(s^k) = [\pm e_{i_0}, ..., \pm e_{i_k}] \quad con \quad i_0 \leq ... \leq i_k\,,$$

en el que hay un vértice repetido, o todos los vértices son distintos pero los signos no se alternan.

En cada caso, una $(k-1)-cara$ positiva puede ocurrir solo si hay a lo más un par de vértices adyacentes con el mismo signo; y si la eliminación de uno de estos vértices da una cara positiva, también lo hará si se elimina el otro vértice.

Así, $p(f, s^k, k-1)$ es par para cada $s^k \in \mathscr{A}_0$, así que

$$T \equiv \sum_{s^k \in \mathscr{A}_+} p(f, s^k, k-1) + \sum_{s^k \in \mathscr{A}_-} p(f, s^k, k-1)\, mod\, 2\,.$$

Notar que cada s^k positivo tiene exactamente una $(k-1)-cara$ positiva, como también cada s^k negativa, obtenemos

$$\sum_{s^k \in \mathscr{A}_+} p(f, s^k, k-1) = \, card\, \mathscr{A}_+\,, \qquad \sum_{s^k \in \mathscr{A}_-} p(f, s^k, k-1) = \, card\, \mathscr{A}_-\,,$$

por lo tanto

$$T \equiv \, (card\, \mathscr{A}_+ + card\, \mathscr{A}_-)\, mod\, 2\,.$$

Finalmente, como $\alpha\, o\, f \,=\, f\, o\, \alpha$, se sigue que un $s^k \in S^k_+$ es negativo si y solo si $\alpha(s^k) \in S^k_-$ es positivo, así que

$$card\, \mathscr{A}_- = card\,\{\, s^k \in S^k_- \mid s^k \;\; es \;\; positivo\}\,;$$

entonces

$$card\, \mathscr{A}_+ + card\, \mathscr{A}_- \,=\, p(f, S^k, k)\,,$$

por lo tanto

$$T \equiv\, p(f, S^k, k)\, mod\, 2\,,$$

concluimos que

$$p(f, S^k, k) \equiv p(f, S^{k-1}, k-1)\, mod\, 2\,.$$

□

Teorema 3.1 (Lema de Combinatoria). *Sea* $f : \mathscr{S}^n \longrightarrow \Sigma^n$ *un mapeo vértice simplicial de una triangulación simétrica de* S^n*.*
Si $\alpha\, o\, f = f\, o\, \alpha$*, entonces* f *mapea un numero impar de simpleces de* S^n *sobre*

$$\sigma^n_0 = [\, e_1,\, -\, e_2, ...,\, (-1)^n\, e_{n+1}\,]\,.$$

Demostración. De acuerdo a la definición, un $s^n \in \mathscr{S}^n$ es positivo si y solo si las imágenes de sus vértices forman un $n - simplex$ en Σ^n y su forma estándar, es σ^n_0. Por la proposición 3.3, tenemos

$$p(f, S^n, n) \equiv p(f, S^{n-1}, n-1)\, mod\, 2\;; \quad p(f, S^{n-1}, n-1) \equiv p(f, S^{n-2}, n-2)\, mod\, 2\,;$$

entonces

$$p(f, S^n, n) \equiv p(f, S^{n-2}, n-2)\, mod\, 2\,,$$

repitiendo el proceso, obtenemos

$$p(f, S^n, n) \equiv p(f, S^0, 0)\, mod\, 2\,.$$

Como $S^0 = \{\, e_1,\, -\, e_1\}$ tenemos

$$(\alpha\, o\, f)(e_1) = -\, f(e_1) \quad y \quad (f\, o\, \alpha)(e_1) = f(-\, e_1)\,,$$

entonces

$$\alpha(f(e_1)) = -\, f(e_1) = f(-\, e_1)\,,$$

por lo tanto $f|S^0$ los mapea en un par de vértices antipodal y es claro que $p(f, S^0, 0) = 1$, así

$$p(f, S^n, n) \equiv 1 \, mod \, 2 \,,$$

lo que completa la demostración. □

El lema combinatorio se aplicará para obtener el teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk sobre la n-esfera, que es equivalente al teorema antipodal de Borsuk.

Lema 3.1 (Lebesgue). *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\{ M_1, ..., M_n \}$ una familia finita de conjuntos cerrados no vacíos en X, con $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i = \emptyset$.*
Entonces existe un $\epsilon > 0$ con la propiedad: cualquier subconjunto $A \subset X$ donde $A \cap M_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n$, debe cumplir $\delta(A) \geq \epsilon$.

Demostración. Porque M_i es un espacio métrico compacto para cada $i = 1, ..., n$, entonces $Z = M_1 \times ... \times M_n$ es un espacio métrico compacto, y consideremos la función $\lambda : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = max \{ d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n \} \,.$$

Afirmación. λ es una función continua.
Sea $(x_{1_m}, ..., x_{n_m})$ una sucesión en Z tal que

$$(x_{1_m}, ..., x_{n_m}) \longrightarrow (x_1, ..., x_n) \,,$$

dado $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$max \{ d(x_{i_m}, x_i) \mid i = 1, ..., n \} < \epsilon/3 \quad para \;\; todo \quad m \geq m_0 \,;$$

sean $\lambda(x_{1_m}, ..., x_{n_m}) = max \{ d(x_{i_m}, x_{j_m}) \mid 1 \leq i \leq j \leq n \} = d(x_{t_m}, x_{r_m})$ y $\lambda(x_1, ..., x_n) = max \{ d(x_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n \} = d(x_u, x_v)$; tenemos

$$d(x_{t_m}, x_{r_m}) \leq d(x_{t_m}, x_r) + d(x_{r_m}, x_r) + d(x_t, x_r) \,,$$

$$d(x_{t_m}, x_{r_m}) \leq d(x_{t_m}, x_r) + d(x_{r_m}, x_r) + d(x_u, x_v) \,,$$

entonces

$$d(x_{t_m}, x_{r_m}) - d(x_u, x_v) \leq d(x_{t_m}, x_r) + d(x_{r_m}, x_r) < \frac{2\,\epsilon}{3} < \epsilon \quad para \;\; todo \quad m \geq m_0 \,;$$

por lo tanto

$$\lambda(x_{1_m}, ..., x_{n_m}) \longrightarrow \lambda(x_1, ..., x_n)\,,$$

concluimos que λ es continua.
Porque $M_1 \cap ... \cap M_n = \emptyset$, la función λ nunca es cero.
Si $A \subset X$ donde $A \cap M_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n$, existe un

$$x_i \in A \cap M_i, \quad para \;\; cada \;\; i = 1, ..., n\,;$$

entonces existe $\epsilon > 0$ que satisface $\lambda(x_1, ..., x_n) \geq \epsilon$, así al menos una de las distancias $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$, entonces $\delta(A) \geq \epsilon$, lo que completa la prueba. □

Como consecuencia inmediata, tenemos:

Teorema 3.2 (Lebesgue). *Sea* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $\{\, M_1, ..., M_n\,\}$ *una cubierta cerrada de* X.
Entonces existe un $\lambda > 0$ *(número Lebesgue del cubrimiento) con la propiedad: si cualquier conjunto* $A \subset X$ *con* $\delta(A) < \lambda$, *donde* $A \cap M_{i_j} \neq \emptyset$ *para cada* $j = 1, ..., r$, *entonces*

$$M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_r} \neq \emptyset\,.$$

Demostración. Probaremos por contradicción.
Supongamos que para todo $\lambda > 0$, existe A_λ tal que $\delta(A_\lambda) < \lambda$ con $A_\lambda \cap M_{i_j} \neq \emptyset$ para cada $j = 1, ..., r$, y $M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_r} = \emptyset$.
Por el lema 3.1 existe un $\epsilon > 0$ con la propiedad: cualquier subconjunto $A_\lambda \subset X$ con $A_\lambda \cap M_{i_j} \neq \emptyset$ para cada $j = 1, ..., r$, donde $\delta(A_\lambda) \geq \epsilon$.
Haciendo $\lambda = \epsilon$, tenemos $\delta(A_\lambda) < \epsilon$, lo que es una contradicción.
Por lo tanto existe un $\lambda > 0$ con la propiedad: si cualquier conjunto $A \subset X$ con $\delta(A) < \lambda$, donde $A \cap M_{i_j} \neq \emptyset$ para cada $j = 1, ..., r$, entonces

$$M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_r} \neq \emptyset\,.$$

□

Lema 3.2. *Sean* $M_1, ..., M_{n+1}$ *conjuntos cerrados en* S^n, *donde ninguno de ellos contiene un par de puntos antipodal.*
Si la familia $\{M_1, ..., M_{n+1},\, \alpha(M_1), ...,\, \alpha(M_{n+1})\,\}$ *es una cubierta de* S^n, *entonces*

$$M_1 \cap ... \cap M_{n+1} \neq \emptyset\,.$$

Demostración. Denotamos $\alpha(M_i)$ por M_{-i}; ya que M_i no contiene ningún par de puntos antipodal, tenemos

$$d(M_i, M_{-i}) = \epsilon_i > 0 \quad para \;\; cada \quad i = 1, ..., n+1\,.$$

Ordenamos el cubrimiento por

$$M_1,\; M_{-1};\; M_{-2},\; M_2;\; M_3,\; M_{-3};\; M_4,\; M_{-4}; ...,$$

y sea λ un número Lebesgue para éste cubrimiento cerrado.
Sea $\mathscr{S}^n = \{\sigma\}$ una triangulación simétrica de S^n tal que

$$\delta(\sigma) < \epsilon = min\,\{\, \lambda,\, \epsilon_1, ...,\, \epsilon_{n+1}\,\} \quad para \;\; cada \quad \sigma \in \mathscr{S}^n\,.$$

Construímos el mapeo $f : \mathscr{S}^n \longrightarrow \sum^n$ como sigue:
Para cada vértice $p \in \mathscr{S}^n$, sea M_j el primer conjunto del cubrimiento que contiene a p, y se establece

$$f(p) = (sgn\, j\,)\,(-1)^{j+1}\, e_{|j|}\,.$$

Afirmación. f es un mapeo vértice simplicial.
Debido a que $\sum^n$ puede describirse como el conjunto de todos los simpleces $[\,\pm\, e_{i_0}, ...,\, \pm\, e_{i_s}\,]$ que no tienen dos vértices antipodal, es suficiente probar que dos vértices p, q de un simplex de $\mathscr{S}^n$ no pueden ser asignados a dos vértices antipodal.
Sean p, q dos vértices de un simplex de $\mathscr{S}^n$ entonces $d(p, q) < \epsilon$, sea M_i el primer conjunto del cubrimiento que contiene a p y M_j el primer cubrimiento que contiene a q. Supongamos que $f(p) = -\, f(q)$, tenemos

$$(sgn\, i\,)\,(-1)^{i+1}\, e_{|i|} = -\,(sgn\, j\,)\,(-1)^{j+1}\, e_{|j|}\,,$$

entonces $i = -\,j$, así $q \in M_{-i}$ y tendríamos $d(p, q) \geq \epsilon_i \geq \epsilon$, lo que es una contradicción, por lo tanto f es un mapeo vértice simplicial.
De la definición de f es fácil ver que $\alpha\, o\, f = f\, o\, \alpha$, por el teorema 3.1 existe algún simplex $[\,p_1, ...,\, p_{n+1}]$ tal que

$$f([\,p_1, ...,\, p_{n+1}]) = [\,e_1, -\,e_2, ..., (-1)^n\, e_{n+1}\,] \quad donde \quad p_i \in M_i\,.$$

Así $[\,p_1, ...,\, p_{n+1}] \cap M_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n+1$, como $\delta([\,p_1, ...,\, p_{n+1}]) < \lambda$, por el teorema 3.2 se sigue que

$$M_1 \cap ... \cap M_{n+1} \neq \emptyset\,.$$

□

Teorema 3.3 (Lusternik-Schnirelmann-Borsuk). *En cualquier cubrimiento cerrado* $\{ M_1, ..., M_{n+1} \}$ *de* S^n *por* $n+1$ *conjuntos, al menos un conjunto* M_i *para algún* $i = 1, ..., n+1,$ *debe contener un par de puntos antipodal.*

Demostración. Supongamos que ningún M_i para cada $i = 1, ..., n+1,$ contiene un par de puntos antipodal; como $\{M_1, ..., M_{n+1},\, \alpha(M_1), ...,\, \alpha(M_{n+1}) \}$ es un cubrimiento de S^n por el lema 3.2

$$M_1 \cap ... \cap M_{n+1} \neq \emptyset\,;$$

ya que cualquier $x_0 \in M_1 \cap ... \cap M_{n+1}$ debe estar en algún conjunto $\alpha(M_j)$ de la cobertura $\{ \alpha(M_1), ...,\, \alpha(M_{n+1}) \}$ de S^n, esto implica que M_j contine un par de puntos antipodal, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto al menos un conjunto M_i para algún $i = 1, ..., n,$ debe contener un par de puntos antipodal. ☐

Los resultados equivalentes al teorema de Lustemik-Sclmirelmann-Borsuk utilizan las nociones de extensibilidad y homotopía en su formulación.

Definición 3.13. *Sean* X, Y *dos espacios de Hausdorff y* $A \subset X,$ *un mapeo continuo es llamado extendible sobre* X *si existe un mapeo continuo* $F : X \longrightarrow Y$ *con* $F|A = f.$

Definición 3.14. *Sean* X, Y *dos espacios de Hausdorff, dos mapeos continuos* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : X \longrightarrow Y$ *son llamados homotópicos si existe un mapeo continuo*

$$H : X\times[0,1] \longrightarrow Y \quad con \quad H(x,0) = f(x) \quad y \quad H(x,1) = g(x) \quad para \;\; cada \quad x \in X\,.$$

El mapeo continuo H *es llamado una homotopía (deformación continua) de* f *a* $g,$ *y escribiremos* $H : f \simeq g.$
Para cada $t \in [0,1],$ *el mapeo* $T : X \longrightarrow Y$ *definido por* $T(x) = H(x,t)$ *es denotado por* $H_t : X \longrightarrow Y.$
Claramente la familia $\{ H_t : X \longrightarrow Y \}_{t\in[0,1]}$ *determina* H *y viceversa.*

Proposición 3.4. *La relación de homotopía* $\simeq$ *es una relación de equivalencia en el conjunto* $\mathcal{C}(X, Y).$

Demostración. Probaremos que la relación es refexiva, simétrica y transitiva.
Reflexiva. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo continuo arbitrario y consideremos el mapeo

$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ definido por $H(x,t) = f(x)$, entonces H es continuo y

$$H(x,0) = f(x) \quad y \quad H(x,1) = f(x)\,,$$

por lo tanto $f \simeq f$.

Simétrica. Si $f \simeq g$ entonces existe un mapeo continuo

$$H : X\times[0,1] \longrightarrow Y \quad con \quad H(x,0) = f(x) \quad y \quad H(x,1) = g(x) \quad para \;\; cada \quad x \in X\,,$$

definimos $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ por $F(x,t) = H(x, 1-t)$ entonces

$$F(x,0) = H(x,1) = g(x) \quad y \quad F(x,1) = H(x,0) = f(x)\,,$$

por lo tanto $g \simeq f$.

Transitiva. Si $H : f \simeq g$ y $G : g \simeq h$, definimos el mapeo continuo

$$D(x,t) = \begin{cases} H(x, 2\,t); & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \\ G(x, 2\,t-1); & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

entonces

$$D(x,0) = H(x,0) = f(x) \quad y \quad D(x,1) = G(x,1) = h(x)\,,$$

por lo tanto $f \simeq h$, esto completa la prueba. $\square$

La relación de homotopía descompone el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ en clases disjuntas por pares llamadas clases de homotopía

Definición 3.15. *Sean* X, Y *dos espacios de Hausdorff, un mapeo continuo* $f : X \longrightarrow Y$ *homotópica a un mapeo constante es llamado nulo homotópico; en este caso escribiremos* $f \simeq 0$.
Un espacio de Hausdorff X *es llamado contractible, si* $id_X : X \longrightarrow X$ *es nulo homotópico.*

Observaciones 3.8. *Establecer una homotopía* $H : f \simeq g$ *es esencialmente un problema de extensibilidad, pues teniendo un mapeo continuo* $h : (X \times 0) \cup (X \times 1) \longrightarrow Y$ *se busca una extensión sobre* $X \times [0,1]$.

Teorema 3.4. *Un mapeo continuo* $f : S^n \longrightarrow Y$ *es nulo homotópico si y solo si* f *es extendible a un mapeo continuo* $F : K^{n+1} \longrightarrow Y$.

Demostración. Asumiendo que $f : S^n \longrightarrow Y$ es extendible a $F : K^{n+1} \longrightarrow Y$. Definimos $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow Y$ por $H(x,t) = F(t\,x)$ entonces

$$H(x,0) = F(0) = y_0 \quad y \quad H(x,1) = F(x) = f(x)\,,$$

por lo tanto $H : 0 \simeq f$.
Si $0 \simeq f$ existe un mapeo continuo $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow Y$ con

$$H(x,0) = y_0 \quad y \quad H(x,1) = f(x)\,,$$

definimos una extensión $F : K^{n+1} \longrightarrow Y$ de f por

$$F(x) = \begin{cases} H(S^n, 0); & 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2\,\|x\| - 1\right); & \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

Si $\|x\| = \frac{1}{2}$, tenemos

$$F(x) = \begin{cases} H(S^n, 0) = y_0; \\ \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 0\right) = y_0. \end{cases},$$

por lo tanto F es continuo, esto completa la demostración. □

Definición 3.16. *Diremos que* $f : S^n \longrightarrow S^k$ *preserva la propiedad antipodal si* $f(-\,x) = -\,f(x)$ *para todo* $x \in S^n$.

Ahora probamos el teorema antipodal de Borsuk y también demostramos que es equivalente a varios resultados geométricos sobre la n-esfera. Una versión de punto fijo del teorema se derivará posteriormente.

Teorema 3.5. *Los siguientes teoremas son equivalentes.*

1. *En cualquier cubrimiento cerrado* $\{\,M_1, ..., M_{n+1}\,\}$ *de* S^n *por* $n{+}1$ *conjuntos, al menos un conjunto* M_i *para algún* $i = 1, ..., n+1$, *debe contener un par de puntos antipodal.*

2. *No existe un mapeo continuo* $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ *que preserva la propiedad antipodal.*

3. **(Teorema antipodal de Borsuk).** *Un mapeo continuo* $f : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ *que preserva la propiedad antipodal no es nulo homotópico.*

4. **(Borsuk-Ulam).** *Cada mapeo* $f : S^n \longrightarrow E^n$ *continuo envía al menos un par de puntos antipodal al mismo punto.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que existe un mapeo continuo $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ que preserva la propiedad antipodal.
Descomponemos S^{n-1} en $n+1$ conjuntos cerrados $A_1, ..., A_{n+1}$ proyectando la frontera de un $n - simplex$ centrado en 0 sobre S^{n-1} y dejando que los A_i sean las imágenes de las $(n-1) - caras$.
Claramente, ningún A_i contiene un par de puntos antipodal.
Sea $M_i = f^{-1}(A_i)$ para cada $i = 1, ..., n+1$. Los M_i son conjuntos cerrados y cubren S^n, así por la hipótesis (1), existe un $x \in M_i \cap \alpha(M_i)$ para algún i.
Como f preserva la propiedad antipodal, tenemos que $f(x)$ y $-f(x)$ pertenecen a A_i, lo que es una contradicción, esto completa la prueba.
$(2) \Rightarrow (3)$. Supongamos que algún mapeo $g : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ preserva la propiedad antipodal y es nulo homotópico, entonces g es extendible a un $G : K^n \longrightarrow S^{n-1}$.
Si $x = \{\, x_1,\, x_2, ...,\, x_{n+1}, 0, ...\} \in S^n$, denotaremos con

$$\bar{x} = \{\, x_1,\, x_2, ...,\, x_n, 0, ...\} \in K^n\,.$$

Definimos el mapeo continuo $\varphi : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} G(\bar{x})\,; & x \in S^n_+\,; \\ \\ -\,G(\alpha(\bar{x}))\,; & x \in S^n_-. \end{cases}$$

Si $x \in S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$, tenemos $\bar{x} = x$, entonces

$$\varphi(x) = \begin{cases} G(x) = g(x)\,; & x \in S^n_+\,; \\ \\ -\,G(\alpha(x)) = -\,g(-\,x) = g(x)\,; & x \in S^n_-. \end{cases}$$

en consecuencia φ está definido en $S^n_+ \cap S^n_-$.
Sea $x \in S^n$, asumimos $x \in S^n_+$ entonces

$$\varphi(x) = G(\bar{x})\,,$$

como $-x \in S^n_-$, tenemos

$$\varphi(-x) = -G(\alpha(-\bar{x})) = -G(\bar{x}),$$

entonces $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, por lo tanto φ es un mapeo continuo que preserva la propiedad antipodal, lo que contradice la hipótesis, esto completa la prueba.

$(3) \Rightarrow (4)$. Supongamos que existe un mapeo continuo $f : S^n \longrightarrow E^n$ tal que $f(x) \neq f(-x)$ para cada $x \in S^n$.

Definimos el mapeo continuo $F : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Claramente $F|S^{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ es un mapeo continuo que preserva la propiedad antipodal.

Sea $x = \{x_1, ..., x_n, 0, ...\} \in K^n$ y $\|x\| \neq 1$, denotamos con $\bar{x} = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}, 0, ...\}$, $x_{n+1} > 0$ tal que $\|\bar{x}\| = 1$.

Consideremos el mapeo continuo $G : K^n \longrightarrow S^{n-1}$ definido por

$$G(x) = \begin{cases} F(x)\,; & \|x\| = 1\,; \\ \\ F(\bar{x})\,; & \|x\| \neq 1\,; \end{cases}$$

como G es una extensión sobre K^n de $F|S^{n-1}$ entonces $F|S^{n-1}$ es nulo homotópico, lo que contradice la hipótesis, esto completa la prueba.

$(4) \Rightarrow (1)$. Supongamos existe algún cubrimiento cerrado $M_1, ..., M_{n+1}$ de S^n donde ningún M_i con $i = 1, ..., n+1$, contiene un par de puntos antipodal, es decir

$$M_i \cap \alpha(M_i) = \emptyset \quad para \;\; cada \quad i = 1, ..., n+1\,.$$

Sea $g_i : S^n \longrightarrow [0,1]$ una función Urysohn con $g_i|M_i = 0$ y $g_i|\alpha(M_i) = 1$ para cada $i = 1, ..., n$; definimos el mapeo continuo $g : S^n \longrightarrow E^n$ por

$$g(x) = (\,g_1(x), ...,\, g_n(x))\,.$$

Por la hipótesis, existe un $z \in S^n$ con $g(z) = g(\alpha(z))$, así

$$g_i(z) = g_i(\alpha(z)) \quad para \;\; cada \quad i = 1, ..., n\,,$$

por lo tanto

$$z \in S^n - \bigcup_{i=1}^{n} M_i - \bigcup_{i=1}^{n} \alpha(M_i)\,.$$

Dado que $\{\, M_1, ..., M_{n+1} \,\}$ y $\{\, \alpha(M_1), ..., \alpha(M_{n+1}) \,\}$ son cubrimientos de S^n, el punto z debe pertenecer a M_{n+1} y $\alpha(M_{n+1})$, lo que contradice la hipótesis, esto completa la prueba. $\square$

3.2. Teorema de Brouwer

Damos dos consecuencias del teorema 3.5 que son particularmente útiles para nuestro trabajo posterior.

Teorema 3.6. *Un mapeo continuo* $f : S^n \longrightarrow S^n$ *con* $f(x) \neq f(\alpha(x))$ *para cada* $x \in S^n$ *no es nulo homotópico.*

Demostración. Dado que $f(x) \neq f(\alpha(x))$, definimos el mapeo continuo $g : S^n \longrightarrow S^n$ por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-\,x)}{\|f(x) - f(-\,x)\|}\,,$$

claramente preserva la propiedad antipodal entonces por el teorema 3.5 afirmamos que g no es nulo homotópico.

Ahora, probaremos que f y g nunca son antipodales.

Supongamos que para algún $z \in S^n$, tenemos que $g(z) = -\,f(z)$ entonces

$$[\,1 + \|f(z) - f(-\,z)\|\,]\,f(z) = f(-\,z)\,,$$

como $\|f(z)\| = \|f(-\,z)\| = 1$, tenemos $1 + \|f(z) - f(-\,z)\| = 1$ lo que es una contradicción.

Definimos el mapeo contínuo $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$ por

$$H(x,t) = \frac{(1-t)\,f(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)\,f(x) + t\,g(x)\|}\,,$$

como

$$H(x,0) = f(x) \quad y \quad H(x,1) = g(x)\,,$$

H es una homotopía de f a g, ya que g no es nulo homotópico se infiere que f no es nulo homotópico, esto concluye la prueba. $\square$

Teorema 3.7 (Borsuk). *Sea* U *una vecindad abierta, convexa, acotada, simétrica del origen en* E^n *y* $F : \overline{U} \longrightarrow E^n$ *un mapeo continuo que preserva la propiedad antipodal en* ∂U*, i.e.,* $-F(a) = F(-a)$ *para cada* $a \in \partial U$*. Entonces* F *tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $p : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional Minkowski para U, y sea E el conjunto E^n con la norma $\|x\|_1 = p(x)$.

Afirmación. El mapeo identidad $h : E^n \longrightarrow E$ es un homeomorfismo que mapea $\overline{U}$ en la bola unitaria K_1^n de E.

Sabemos que $\overline{U} = U \cup \partial U$.

1. Sea $x \in \partial U$, como $0 \in U$ y U convexo entonces

$$\|x\|_1 = inf\,\{\, t \geq 0 \,|\, x \in t\,U \,\} = 1\,,$$

   por lo tanto $x \in \partial K_1^n$.

2. Sea $x \in U$ entonces

$$\|x\|_1 = inf\,\{\, t \geq 0 \,|\, x \in t\,U \,\} \leq 1\,,$$

   por lo tanto $x \in K_1^n$.

De (1) y (2) se concluye que h mapea $\overline{U}$ en la bola unitaria K_1^n.

Consideremos el mapeo continuo $g = h\,o\,F\,o\,h^{-1} : K_1^n \longrightarrow E$, probaremos que g preserva la propiedad antipodal en ∂K_1^n.

Sea $x \in \partial K_1^n$ entonces

$$g(x) = F(x) \quad y \quad g(-x) = F(-x)\,,$$

por lo tanto $g(-x) = -g(x)$ para cada $x \in \partial K_1^n$.

Ahora probaremos que g tiene un punto fijo.

Supongamos que $g(x) \neq x$ para todo $x \in K_1^n$.

Definimos el mapeo continuo $f : K_1^n \longrightarrow \partial K_1^n$ por

$$f(x) = \frac{g(x) - x}{\|g(x) - x\|_1}\,,$$

por el teorema 3.4 tenemos que $f|\partial K_1^n \longrightarrow \partial K_1^n$ es nulo homotópico, como $f|\partial K_1^n$ preserva la propiedad antipodal, por el teorema 3.5 tenemos que $f|\partial K_1^n$ no es nulo homotópico, lo que es una contradicción, entonces existe $x \in K_1^n$ tal que

$$g(x) = (h\,o\,F\,o\,h^{-1})(x) = x\,,$$

así

$$F(h^{-1}(x)) = h^{-1}(x)\,,$$

por lo tanto F tiene un punto fijo. $\square$

El siguiente caso especial del teorema antipodal de Borsuk es básico en la teoría del punto fijo.

Teorema 3.8. *El mapeo identidad* $id : S^n \longrightarrow S^n$ *no es homotópico a un mapeo constante.*

Demostración. Como $id : S^n \longrightarrow S^n$ preserva la propiedad antipodal, por el teorema 3.5 tenemos que id no es nulo homotópico. $\square$

Este resultado tiene muchas formulaciones equivalentes; de hecho es equivalente al teorema de punto fijo de Brouwer.

Teorema 3.9. *Los siguientes teoremas son equivalentes.*

1. S^n *no es contractible en si mismo.*
2. **(Bohl).** *Cada mapeo continuo* $F : K^{n+1} \longrightarrow E^{n+1}$ *tiene al menos una de las siguientes propiedades:*
   a) F *tiene un punto fijo.*
   b) *Existen* $x \in \partial\, K^{n+1}$ *y* $\lambda \in (0,1)$ *tal que* $x = \lambda\, F(x)$.
3. **(Brouwer).** *Cada mapeo continuo* $F : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ *tiene al menos un punto fijo.*
4. **(Borsuk).** *No existe retracción* $r : K^{n+1} \longrightarrow S^n$, *i.e., no existe mapeo continuo* $r : K^{n+1} \longrightarrow S^n$ *que mantenga cada* $x \in S^n$ *fijo.*

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$. Supongamos que $F(x) \neq x$ para todo $x \in K^{n+1}$, y $y \neq t\, F(y)$ para todo $y \in \partial\, K^{n+1}$, $t \in (0,1)$; entonces $y \neq t\, F(y)$ para $t = 0, 1$. Sea $r : E^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$ el mapeo continuo definido por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}\,.$$

Definimos el mapeo continuo $H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$ por

$$H(y,t) = \begin{cases} r(y - 2\,t\,F(y))\,, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\,; \\ \\ r[(2-2\,t)\,y - F((2-2\,t)\,y)]\,, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,; \end{cases}$$

como

$$H(y,0) = r(y) = y \quad y \quad H(y,1) = r(-\,F(0)) = \frac{-\,F(0)}{\|F(0)\|} \quad para \;\; todo \quad y \in S^n\,,$$

entonces $id : S^n \longrightarrow S^n$ es homotópico a una constante, lo que es una contradicción, esto completa la prueba.

$(2) \Rightarrow (3)$. Como $F(\partial\, K^{n+1}) \subset K^{n+1}$ tenemos que

$$\lambda\,\|F(y)\| < 1, \quad para \;\; todo \quad y \in \partial\, K^{n+1}, \;\; \lambda \in (0,1)\,;$$

entonces

$$y \neq \lambda\, F(y), \quad para \;\; todo \quad y \in \partial\, K^{n+1}, \;\; \lambda \in (0,1)\,;$$

por la hipótesis (2) concluimos que F tiene un punto fijo.

$(3) \Rightarrow (4)$. Supongamos exista una retracción $r : K^{n+1} \longrightarrow S^n$, el mapeo continuo $F : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ definido por $F(x) = -\,r(x)$ está libre de puntos fijos.

Supongamos que $x = F(x) = -\,r(x)$ para algún $x \in K^{n+1}$.

1. Si $x \in \partial\, K^{n+1} = S^n$ entonces $x = -\,x$, contradicción.

2. Si $x \in int(K^{n+1})$, tenemos $\|x\| < 1$ entonces $x \neq -\,r(x)$, contradicción.

Como $F : K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ está libre de puntos fijos, contradice la hipótesis (3), esto completa la prueba.

$(4) \Rightarrow (1)$. Supongamos que $h : 0 \simeq id$, donde $h(S^n, 0) = x_0$, $x_0 \in S^n$.

Definimos el mapeo continuo $r : K^{n+1} \longrightarrow S^n$ por

$$r(x) = \begin{cases} x_0\,, & \|x\| \leq \frac{1}{2}\,; \\ \\ h\left(\frac{x}{\|x\|}, 2\,\|x\| - 1\right)\,, & \|x\| \geq \frac{1}{2}\,; \end{cases}$$

como $r|S^n = id$ entonces $r : K^{n+1} \longrightarrow S^n$ es una retracción, lo que contradice la hipótesis (4), esto completa la prueba. $\square$

Capítulo 4

Teorema de Schauder y aplicaciones

4.1. Extensiones de los teoremas de Borsuk y Brouwer

La aproximación de los mapeos compactos en espacios lineales normados mediante mapeos de finito-dimensional se basará en una proyección simple de cualquier unión finita de ϵ-bolas en la cápsula convexa de sus centros.

Definición 4.1. *Sea* $N = \{c_1, ..., c_n\}$ *un subconjunto finito de un espacio lineal normado, y para cualquier* $\epsilon > 0$ *fijo, sea*

$$(N, \epsilon) = \bigcup \{ B(c_i, \epsilon) \mid i \in [n] \} .$$

Para $i \in [n]$, *sea* $u_i : (N, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ *el mapeo definido por*

$$u_i(x) = max \{0, \epsilon - \|x - c_i\| \} .$$

La proyección Schauder $p_\epsilon : (N, \epsilon) \longrightarrow conv(N)$ *es definido por*

$$p_\epsilon(x) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, c_i .$$

Proposición 4.1. *Sea* E *un espacio lineal normado,* $C \subset E$ *un subconjunto convexo donde* $N = \{c_1, ..., c_n\} \subset C$ *y* p_ϵ *es la proyección de Schauder. Entonces:*

1. $p_\epsilon : (N, \epsilon) \longrightarrow conv(N)$, $conv(N) \subset C$, *es un mapeo compacto.*

2. $\|x - p_\epsilon(x)\| < \epsilon$ *para todo* $x \in (N, \epsilon)$.

3. *Si* $N \subset C$ *es simétrico con respecto a* 0, *i.e., si* $N = \{c_1, ..., c_k, -c_1, ..., -c_k\}$, *entonces*

$$(N,\, \epsilon) = -\,(N,\, \epsilon) \quad y \quad p_\epsilon(-\,x) = -\,p_\epsilon(x) \quad para \;\; todo \quad x \in (N,\, \epsilon)\,.$$

Demostración. (1). De la definición de p_ϵ, se tiene $p_\epsilon[(N,\, \epsilon)] \subset conv(N)$, como $conv(N)$ es compacto, entonces p_ϵ es un mapeo compacto.
(2). Sea $x \in (N,\, \epsilon)$, entonces

$$\|x - p_\epsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)}\, x - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, c_i}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)} \right\|$$

$$\|x - p_\epsilon(x)\| = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)} \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\,(x - c_i) \right\|$$

$$\|x - p_\epsilon(x)\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, \|x - c_i\|}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)}\,,$$

por lo tanto

$$\|x - p_\epsilon(x)\| < \epsilon\,.$$

(3). Debido a que $B(-\,c_i, \epsilon) = -\,B(c_i, \epsilon)$, se tiene que $(N,\, \epsilon) = -\,(N,\, \epsilon)$.
Sea $x \in (N,\, \epsilon)$, tenemos

$$p_\epsilon(-\,x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u_i(-\,x)} \sum_{i=1}^{n} u_i(-\,x)\, c_i$$

$$p_\epsilon(-\,x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x)} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\,(-\,c_i)\,,$$

entonces $p_\epsilon(-\,x) = -\,p_\epsilon(x)$, esto completa la prueba. □

Teorema 4.1 (Teorema de aproximación de Schauder). *Sea* X *un espacio métrico,* C *un subconjunto convexo de un espacio lineal normado* E, *y* $F : X \longrightarrow C$ *un mapeo continuo y compacto.*
Entonces para cada $\epsilon > 0$, *existe un conjunto finito* $N = \{c_1, ..., c_n\} \subset F(X) \subset C$ *y un mapeo* $finito - dimensional$ $F_\epsilon : X \longrightarrow C$ *tal que:*

1. $\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon$ *para todo* $x \in X$.

2. $F_\epsilon(X) \subset conv(N) \subset C$.

Demostración. Debido a que $F : X \longrightarrow C$ es un mapeo compacto, se tiene que $F(X)$ es relativamente compacto, entonces $F(X)$ es totalmente acotado, por lo tanto existe un conjunto finito $N = \{c_1, ..., c_n\} \subset F(X)$ con $F(X) \subset (N, \epsilon)$.
Definimos $F_\epsilon : X \longrightarrow C$ por

$$F_\epsilon(x) = p_\epsilon(F(x)) \,,$$

donde $p_\epsilon : (N, \epsilon) \longrightarrow conv(N)$ es la proyección de Schauder, por la proposición 4.1, se tiene que el mapeo F_ϵ, satisface (1) y (2). □

Definición 4.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $F : A \subset X \longrightarrow X$ *un mapeo continuo. Dado un* $\epsilon > 0$, *cualquier punto* $a \in A$ *con* $d(a, F(a)) < \epsilon$, *es llamado un punto* $\epsilon - fijo$ *para* F.

Proposición 4.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* A *un subconjunto cerrado de* X *y* $F : A \longrightarrow X$ *un mapeo continuo y compacto.*
Entonces F *tiene un punto fijo si y solo si* F *tiene un punto* $\epsilon - fijo$ *para cada* $\epsilon > 0$.

Demostración. $(\Longrightarrow)$. Sea x un punto fijo para F, dado $\epsilon > 0$, tenemos que $d(x, F(x)) < \epsilon$ entonces x es un punto $\epsilon - fijo$ para F.
$(\Longleftarrow)$. Sea a_n un punto $\frac{1}{n} - fijo$ para F, así

$$d(a_n, F(a_n)) < \frac{1}{n}\,, \quad para \;\; cada \quad n = 1, ..., n\,.$$

Debido a que F es compacto, asumimos que

$$F(a_n) \longrightarrow x\,, \quad x \in \overline{F(A)}\,.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$, entonces

$$d(a_n, x) \leq d(a_n, F(a_n)) + d(F(a_n), x) < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2}\,,$$

$$d(a_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,, \quad n \geq n_0\,;$$

por lo tanto $a_n \longrightarrow x$, como A es cerrado, tenemos que $x \in A$.
Por la continuidad de F , tenemos

$$F(a_n) \longrightarrow F(x) \, ;$$

entonces $x = F(x)$, por lo tanto F tiene un punto fijo. □

Ahora formularemos los teoremas de Brouwer y Borsuk respectivamente que serán válidos para todos los espacios lineales normados.

Teorema 4.2 (Teorema de punto fijo de Schauder). *Sea E un espacio lineal normado, C un subconjunto convexo (no necesariamente cerrado) de E.*
Entonces cada mapeo continuo y compacto $F : C \longrightarrow C$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Probaremos que para cada $\epsilon > 0$, F tiene un punto $\epsilon - fijo$.
Dado $\epsilon > 0$, por el teorema 4.1, existe un $F_\epsilon : C \longrightarrow C$ tal que

1. $\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon$, para todo $x \in C$.

2. $F_\epsilon(C) \subset conv(N) \subset C$, para algún conjunto finito $N \subset C$.

Como $conv(N)$ es homeomorfo a una bola $finito - dimensional$, es decir existe un homeomorfimo $f : K \longrightarrow conv(N)$, además $F_\epsilon(conv(N)) \subset conv(N)$.
Consideramos el mapeo continuo $H = f^{-1} \, o \, F_\epsilon \, o \, f \, : \, K \longrightarrow K$, por el teorema de Brouwer H tiene un punto fijo, entonces F_ϵ tiene un punto fijo, que lo denotamos por x_0. Luego

$$\|x_0 - F(x_0)\| = \|F_\epsilon(x_0) - F(x_0)\| \leq \epsilon \, ,$$

entonces x_0 es un punto $\epsilon - fijo$ para F.
Por la proposición 4.2, F tiene un punto fijo. □

Teorema 4.3 (Borsuk). *Sea E un espacio lineal normado, $U \subset E$ una vecindad abierta, convexa, acotada y simétrica del origen en E.*
Entonces cada mapeo continuo y compacto $F : \overline{U} \longrightarrow E$ que preserva la propiedad antipodal en ∂U , i.e., $- F(a) = F(- a)$ para cada $a \in \partial U$; tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, es suficiente probar que F tiene un punto $\epsilon - fijo$.
Escogemos un subconjunto finito $N \subset E$ simétrico con respecto del origen en E, y tal que $F(\overline{U}) \subset (N, \epsilon)$.
Probaremos que el mapeo $p_\epsilon \, o \, F : \overline{U} \longrightarrow conv(N)$ preserva la propiedad antipodal en ∂U.
Sea $x \in \partial U$, tenemos

$$(p_\epsilon \, o \, F)(-x) = p_\epsilon(-F(x)) = -p_\epsilon(F(x)) ,$$

$$(p_\epsilon \, o \, F)(-x) = -(p_\epsilon \, o \, F)(x) .$$

Sea L^k un subespacio de dimensión finita de E con $(p_\epsilon \, o \, F)(\overline{U}) \subset L^k$, y consideremos el mapeo $F^* = (p_\epsilon \, o \, F) \,|\, (\overline{U} \cap L^k)$.
Ahora, $U^k = U \cap L^k$ es una vecindad abierta, convexa, acotada y simétrica de 0 en L^k, y $F^* : \overline{U}^k \longrightarrow L^k$ preserva la propiedad antipodal en $\partial\,(U^k) \subset \partial U$.
Se sabe que existe un homeomorfismo $f : L^k \longrightarrow E^k$ entonces $f(U^k) = W$ es una vecindad abierta, convexa, acotada y simétrica de 0 en E^k.
Consideremos el mapeo continuo $g = f \, o \, F^* \, o \, f^{-1} : \overline{W} \longrightarrow E^k$ que preserva la propiedad antipodal en ∂W, por el teorema 3.7, g tiene un fijo, lo que implica que F^* tiene un punto fijo x_0.
Como

$$\|x_0 - F(x_0)\| = \|F^*(x_0) - F(x_0)\| = \|p_\epsilon(F(x_0)) - F(x_0)\| < \epsilon ,$$

entonces x_0 es un punto $\epsilon - fijo$ para F, esto completa la demostración. □

4.2. Aplicaciones de los teoremas de Schauder y Borsuk

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = g(t, u) , \quad 0 \le t \le T ; \\ \\ u(0) = 0 . \end{cases}$$

Sea

$$C_0^1 = \{ \, u \in C^1[0, T] \mid u(0) = 0 \, \} ,$$

entonces el operador lineal $\dfrac{d}{d\,t} \equiv L : C_0^1 \longrightarrow C[0,T]$ es claramente biyectiva con inversa

$$L^{-1}(f)(t) = \int_0^t f(x)\,dx \equiv u(t)\,.$$

Afirmación. L^{-1} es continuo.

Recordar que la norma en C_0^1 es $\|u\|_1 = max\{\,\|u\|, \|u'\|\,\}$, donde $\|\;\|$ denota la norma del supremo en $[0,T]$, como $\|u\| \leq T\,\|Lu\|$ y $\|u'\| = \|Lu\|$, tenemos $\|u\|_1 \leq (T+1)\,\|Lu\|$.

Entonces, si $u = L^{-1}(f)$, tenemos $\|L^{-1}(f)\|_1 \leq (T+1)\,\|f\|$, y $L^{-1} : C[0,T] \longrightarrow C_0^1$ es por lo tanto continuo.

Ahora probaremos:

Teorema 4.4 (Peano). *Sea* $g : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua limitada. Entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{d\,t} = g(t,\,u)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,; \\[2em] u(0) = 0\,. \end{cases}$$

tiene al menos una solución $u \in C_0^1$.

Demostración. Hacemos $C = C[0,T]$.

Sea el operador $G : C \longrightarrow C$ definido por $G(u)(t) = g(t, u(t))$, y sea $j : C_0^1 \longrightarrow C$ la inclusión natural. El problema consiste en probar que $L(u) = G(j(u))$ tiene una solución o equivalentemente, porque L es invertible, que el operador $jL^{-1}G : C \longrightarrow C$ tiene un punto fijo.

Debido a que j es completamente continuo y G es limitado, el operador $jL^{-1}G$ es compacto, por el teorema de Schauder $jL^{-1}G$ tiene un punto fijo. □

Teorema 4.5. *Sea* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *cualquier homeomorfismo. Si* $T(T(a)) = a$ *para todo* $a \in \mathbb{R}^n$, *entonces* T *tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^n$; podemos asumir $T(a) \neq a$.

La esfera S^n contiene de manera natural la sucesión $S^0 \subset S^1 \subset ... \subset S^{n-1} \subset S^n$, cada esfera es el ecuador de la siguiente.

Definimos por inducción, un mapeo continuo $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface

$$f(-\,x) = T(f(x))\,.$$

Para S^0, el mapeo $f(1) = a$, $f(-1) = T(a)$. Asumiendo f definido en S^k, extendemos f de cualquier manera sobre el hemisferio norte $S_+^{k+1} \subset S^{k+1}$, y extendemos sobre S_-^{k+1} por la fórmula $f(-x) = T(f(x))$, esto completa la inducción.
Aplicando el teorema de Borsuk - Ulam, al mapeo continuo $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existe algún $x_0 \in S^n$ con $f(-x_0) = f(x_0)$; entonces $f(x_0) = T(f(x_0))$, por lo tanto T tiene un punto fijo. □

El siguiente resultado de Krein-Krasnosel'skñ-Milman juega un rol importante en la teoría de perturbación para operadores lineales.

Teorema 4.6. *Sea* $(E, \| \, \|)$ *un espacio de Banach finito-dimensional y* M, N *subespacios lineales de* E*. Si* $dim\, M > dim\, N$*, entonces existe un* $x_0 \in M$ *tal que*

$$dist(x_0, N) = \|x_0\| > 0\,.$$

Demostración. Supongamos primero que la norma $\| \, \|$ en E es estrictamente convexo:

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\| \quad donde \;\; x, y \quad son \;\; linealmente \;\; independientes\,.$$

Definimos el mapeo $f : E \longrightarrow N$ por $y = f(x)$ el único punto mas próximo en N para cada $x \in E$, además $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in E$.
Aplicando el teorema de Borsuk a $f|S_M : S_M \longrightarrow N$, obtenemos un punto $x_0 \in S_M$ tal que $f(x_0) = 0$.
Como $dist(x_0, N) = \text{ínf}\{\|x_0 - y\| \mid y \in N\} = \|x_0 - f(x_0)\|$ entonces

$$dist(x_0, N) = \|x_0\|\,.$$

En el caso general, escogemos una base $\{\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^n\}$ en E^* y definimos

$$\|x\|_m = \left\{ \|x\|^2, \frac{1}{m}[\langle \varphi^1, x\rangle^2 + ... + \langle \varphi^n, x\rangle^2] \right\}^{\frac{1}{2}} ;$$

$\|x\|_m$ es una norma y estrictamente convexa en E.
Para cada $m = 1, 2, ...$ existe un $x_m \in M$ con $dist_m(x_m, N) = \|x_m\|_m = 1$.
Como $\|x_m\| \leq \|x_m\|_m = 1$, la sucesión $\{x_m\}$ contiene una subsucesión convergente relativa a $\| \, \|$; si x_0 es límite de esta subsucesión entonces $f(x_0) = 0$ por lo tanto

$$dist(x_0, N) = \|x_0\|\,.$$

□

Conclusión

El teorema 4.1, debido a Schauder (1930), evolucionó de una serie de resultados especiales relacionados con las extensiones del teorema de Brouwer al caso de los espacios funcionales. El primer resultado importante en esta dirección se debió a Birkhoff-Kellogg (1922), quien generalizó el teorema de Brouwer a subconjuntos convexos, compactos de $L^2(0,1)$ y $C^n(0,1)$. Schauder extendió primero el resultado anterior a los espacios de Banach de tipo (S) con una base y luego en 1930 a un espacio de Banach arbitrario. Este tipo de espacios, introducido por Schauder, resultó ser especialmente útil en aplicaciones; observamos que varios años más tarde, Eberlein demostró que los espacios de tipo (S) de Banach coinciden con los espacios reflexivos.

El teorema 4.3 fue establecido (en una forma algo diferente) con la ayuda del grado de Leray-Schauder por Krasnosel'skñ (1951).

Bibliografía

[1] Bourbaki, N. (1955). *Espaces vectoriels topologiques.* Paris, Francia: Hermann.

[2] Borsuk, K. (1967). *Theory of Retracts.* Warsaw, Poland: Polish Sci.

[3] Brézis, H. (1983). *Analyse fonctionnelle.* Paris, Francia: Masson.

[4] Bishop, E. y Phelps, R. (1963). The support functionals of a convex set. *Proc. Sympos, Pure Math, AMS, 7,* 27-35.

[5] Caristi, J. (1976). Fixed point theorems for mappings satisfying the inwardness condition. *Trans. AMS, 215,* 241-251.

[6] Granas, A. y Dugundji, J. (2003). *Fixed point theory.* New York, United States of America: Springer.

[7] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications.* United States of America: John Wiley y Sons. Inc.

[8] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* United States of America: McGraw-Hill.

[9] Yosida, K. (1965). *Functional Analysis.* New York, United States of America: Springer.